

SIMMETRIE: METAFORE LETTERALI

Piergiorgio Odifreddi

Luglio 1999

Secondo Goethe, i matematici sono come i francesi: ogni volta che gli si dice qualcosa, la traducono nel loro linguaggio e subito appare diversa. Puntualmente, ogni volta che si dice loro “simmetria”, i matematici la traducono con “invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni”, e subito appare incomprensibile. Per ritradurre l’espressione nel linguaggio comune converrà considerare manifestazioni della simmetria in contesti familiari, e astrarre da queste i concetti matematici.

Simmetrie geometriche

La geometria si interessa delle proprietà delle figure. Poichè però vogliamo evitare problemi alla curatrice grafica della rivista, oltre che cercare di attirare nella nostra trappola i lettori non specialisti, limiteremo la nostra attenzione alla *geometria dell’alfabeto*, che si interessa delle proprietà delle lettere.

Prendiamo, ad esempio, la lettera b. Riflettendola verticalmente, in uno specchio disposto parallelamente ai lati lunghi del foglio, otteniamo la lettera d. Riflettendola invece orizzontalmente, in uno specchio disposto parallelamente ai lati corti del foglio, otteniamo la lettera p. Se invece ruotiamo il foglio di centottanta gradi, oppure lo guardiamo dall’altra parte del tavolo, la b si trasforma in una q. Naturalmente, la cosa non cambia se si parte da una qualunque delle quattro lettere b, d, p e q: q si può ottenere riflettendo p verticalmente, o d orizzontalmente, e così via. In un senso preciso, le quattro lettere sono dunque la *stessa* lettera, semplicemente in posizioni diverse.

Le operazioni che abbiamo appena eseguito sulle lettere si chiamano, per ovvi motivi, *riflessioni* e *rotazioni*. Possiamo subito notare che la rotazione

si potrebbe evitare, perchè si può ridurre a due opportune riflessioni: ad esempio, se dapprima riflettiamo b verticalmente, ottenendo d , e poi riflettiamo d orizzontalmente, otteniamo di nuovo q , senza rotazioni. Non sarebbe invece possibile evitare le riflessioni: ad esempio, non c'è modo di ruotare b o q , in modo da farle diventare d o p .

Proviamo ora un gioco diverso, considerando non più singole lettere ma parole. Ad esempio, in “bdb” la d è una riflessione verticale sia della b di sinistra che di quella di destra, il che significa che la b di sinistra può essere spostata sulla b di destra mediante due riflessioni. Un movimento orizzontale di questo genere viene chiamato *traslazione*, e abbiamo appena osservato che una traslazione si può ridurre a due opportune riflessioni.

Analogamente, nella parola “bp” la p si può considerare come uno spostamento orizzontale non della b , ma di una p che è una sua riflessione orizzontale. In questo caso si dice che b ha subito una *glissoriflessione* orizzontale, e abbiamo appena osservato che una glissoriflessione si può ridurre a una riflessione, seguita da una traslazione nella stessa direzione.

Poichè questi esempi mostrano che la riflessione ha un ruolo centrale, i matematici definiscono la *simmetria geometrica* (che loro chiamano *isometria*) come un qualunque movimento che si ottenga mettendo insieme delle riflessioni. E due figure sono geometricamente simmetriche (o isometriche) se è possibile passare da una all'altra mediante una simmetria geometrica. Ad esempio, le impronte dei piedi di un soldato sull'attenti sono simmetriche perchè legate da una riflessione; se il soldato effettua un fianco-destro o un fianco-sinistro senza spostarsi, le impronte dello stesso piede sono legate da una rotazione; se invece il soldato è in marcia, le impronte dello stesso piede sono legate da una traslazione, e quelle di piedi diversi da una glissoriflessione.

I tipi di simmetrie che abbiamo considerato non sono stati scelti a caso. Si può infatti dimostrare che *ogni* simmetria geometrica, anche se apparentemente più complicata, è in realtà riducibile a una riflessione, o una rotazione, o una traslazione, o una glissoriflessione. Ad esempio, la simmetria che sposta orizzontalmente una b in una d sembra richiedere una riflessione verticale e una traslazione orizzontale, ma in realtà si può fare mediante una sola riflessione verticale (in uno specchio posto a metà distanza fra la b di partenza e la d di arrivo). I quattro tipi forniscono dunque una *classificazione* completa delle simmetrie.

Prima di passare alle applicazioni, facciamo ancora un paio di osservazioni. Anzitutto, come abbiamo già accennato, rotazioni e traslazioni non

cambiano il verso di una lettera (b può diventare q, ma non d o p), mentre riflessioni e glissoriflessioni sì. Inoltre, traslazioni e glissoriflessioni muovono sempre tutte le lettere, mentre una rotazione ne lascia una allo stesso posto (quella attorno a cui si ruota), e una riflessione lascia addirittura una riga allo stesso posto (quella rispetto a cui si riflette).

Gruppi di simmetrie

Una volta introdotte e classificate le simmetrie geometriche, possiamo usarle per determinare il *grado di simmetria* di una figura. In particolare, potremo dire che una figura è tanto più simmetrica, quante più simmetrie possiede.

Incominciamo, anzitutto, a considerare le simmetrie possedute da una singola lettera: le simmetrie, cioè, che la lasciano invariata. Poichè traslazioni e glissoriflessioni spostano qualunque lettera, dobbiamo considerare soltanto riflessioni e rotazioni. A, M, T, U, V e W sono lasciate invariate da una riflessione verticale, così come B, C, D, E e K da una riflessione orizzontale, ma nessuna di esse da una rotazione. N, S e Z sono lasciate invariate da due rotazioni (di centottanta gradi a destra o sinistra), ma non da riflessioni. H, I e O (un ovale) sono lasciate invariate da due riflessioni e due rotazioni, Δ e Y (se disegnate regolari) da tre riflessioni e tre rotazioni, e X da quattro riflessioni e quattro rotazioni.

Le lettere di un alfabeto possono ovviamente coprire soltanto un numero finito di casi, ma è facile immaginarsene infiniti. Ad esempio, generalizzando I, Y e X, una croce regolare con n (semi)braccia uguali è lasciata invariata da n rotazioni e n riflessioni (la stessa cosa succede, generalizzando Δ , per un poligono regolare di n lati): l'insieme delle sue simmetrie si chiama *gruppo diedrale* di ordine n .

Analogamente, generalizzando Z, una croce regolare uncinata con n (semi)braccia uguali è lasciata invariata da n rotazioni, ma non da riflessioni (perchè queste invertono il senso di rotazione degli uncini): l'insieme delle sue simmetrie si chiama *gruppo ciclico* di ordine n . Due croci uncinata note dai tempi antichi sono la *trinacria* a tre braccia, simbolo della Sicilia, e la *svastica* a quattro braccia.

Ancora una volta questi esempi sono caratteristici. Leonardo ha infatti dimostrato che i gruppi diedrali e i gruppi ciclici costituiscono i soli insiemi di simmetrie possibili per i *rosoni*: per quelle figure, cioè, come le finestre delle cattedrali gotiche, che ammettono soltanto un numero finito di simmetrie e un

centro (ossia un punto che non viene mosso da nessuna di queste simmetrie). Se invece di un solo punto rimane invariato un intero segmento, allora l'unica possibile simmetria è una riflessione.

Rimangono ancora da considerare le figure che ammettono soltanto un numero finito di simmetrie, ma che non hanno punti che rimangono sempre invariati. Poichè fra le simmetrie di queste figure ci deve essere sempre almeno una traslazione (se c'è una glissoriflessione, basta applicarla due volte per ottenere una traslazione), queste figure non possono essere finite. Inoltre, poichè stiamo considerando figure di un piano *bidimensionale*, ogni traslazione si può scomporre in al massimo *due* traslazioni: una orizzontale e una verticale.

Iniziamo a considerare il caso di una sola traslazione, che riguarda composizioni di lettere su una sola riga. Poichè la composizione risulta invariata dopo una traslazione, deve essere costituita di una parte finita che si ripete all'infinito: siamo dunque in presenza di un *fregio* o *greca*, del tipo usato per le decorazioni periodiche degli zoccoli dei muri.

In teoria ci potrebbero essere 16 tipi di fregi, perchè altrettante sono le possibili combinazioni di rotazioni, riflessioni orizzontali o verticali, e glissoriflessioni. In pratica, però, alcuni tipi sono impossibili: ad esempio, abbiamo già osservato che non si possono avere riflessioni orizzontali e verticali senza rotazioni; analogamente, non si può avere una riflessione orizzontale senza una glissoriflessione (perchè stiamo supponendo che ci sia una traslazione orizzontale). In questo modo si dimostra che esistono esattamente 7 tipi diversi di fregi, che si possono esemplificare nel modo seguente:

... FFFFFFFF ...
 ... TTTTTTTT ...
 ... ZZZZZZZZ ...
 ... EEEEEEEE ...
 ... HHHHHHHH ...
 ... bpbpbpbp ...
 ... bdpqbdpq ...

La prima riga è lasciata invariata solo da una infinità di traslazioni, e la seconda riga da una infinità di traslazioni e di riflessioni: i loro rispettivi insiemi di simmetrie si chiamano *gruppo ciclico infinito* e *gruppo diedrale*

infinito, e sono versioni infinitarie dei gruppi ciclici e diedrali finiti descritti in precedenza. A parte le traslazioni, la terza riga è lasciata invariata da rotazioni, la quarta da riflessioni orizzontali, la quinta da riflessioni orizzontali e verticali, la sesta da glissoriflessioni, e la settima da riflessioni verticali e rotazioni.

Il caso di due traslazioni riguarda non più righe ma pagine infinite, in cui si ripetono configurazioni bidimensionali di lettere: siamo questa volta in presenza di *mosaici* o *piastrelle*, usati per pavimentazioni o tappezzerie, e la classificazione di tutti i possibili tipi di simmetrie è analoga a quella appena vista per i fregi, benchè molto più complicata. I possibili tipi questa volta sono 17, e quasi tutti sono stati usati sia dagli egizi che dagli arabi: gli esempi più noti e artistici si trovano nelle decorazioni moresche dell'Alhambra di Granada.

Abbiamo così discusso tutti i possibili tipi di figure piane che ammettono soltanto un numero finito di simmetrie, ma ne esistono anche con un numero infinito. Un esempio tipico è la lettera o (un cerchio), che è lasciata invariata da infinite rotazioni (di un qualunque numero di gradi) e da infinite riflessioni (rispetto a qualunque diametro): l'insieme delle sue simmetrie si chiama *gruppo continuo*, e costituisce un ulteriore sviluppo della sequenza dei gruppi diedrali.

Una volta studiate le simmetrie delle figure piane, si tratterebbe ora di passare allo spazio. Le figure tridimensionali che ammettono un numero finito di simmetrie sono i *cristalli*, dei quali esistono 230 tipi, e proprio in cristallografia è stata isolata, da parte di Auguste Bravais nel 1849, la nozione astratta di gruppo. Parlare di questa ci porterebbe troppo lontano, ma possiamo concludere dicendo che tutti i gruppi astratti si possono in realtà esemplificare mediante gli *anagrammi*, cioè i riordinamenti delle lettere di una parola (finita o infinita). Il che conferma la generalità della nostra scelta espositiva, di esemplificare le simmetrie geometriche in maniera linguistica.