DAI PARADOSSI AI TEOREMI

Piergiorgio Odifreddi

Febbraio 1996

Per tre volte, nella storia, i paradossi sono stati al centro dell'attenzione: nel periodo greco, nel medioevo, e a fine ottocento e inizio novecento. I diversi nomi con cui vennero chiamati nei tre periodi riflettono i diversi atteggiamenti che si ebbero verso di essi: per i greci erano *paralogismi*, 'oltre la logica'; per i medioevali *insolubilia*, 'problemi insolubili'; e per i moderni *antinomie*, 'contro le regole', o appunto *paradossi*, 'oltre l'opinione corrente'.

Ci fu dunque un progressivo cambiamento di prospettiva: da puri e semplici errori di ragionamento, i paradossi vennero dapprima rivalutati come dilemmi inspiegabili, e poi valorizzati come indizi di problemi del senso comune.

Oggi i paradossi sono appunto descritti come verità che stanno a testa in giù e gambe all'aria per attirare l'attenzione, e mostrano una discrepanza tra le credenze che rendono un'affermazione impossibile, e la logica che rende un argomento in loro difesa corretto: l'unica soluzione possibile, non indolore, è una revisione radicale delle credenze, della logica, o di entrambe.

In matematica, la revisione provoca a volte una singolare reincarnazione: alla luce dei nuovi concetti introdotti per risolverli, i vecchi paradossi non solo cessano di essere tali, ma si trasformano addirittura in nuovi teoremi o definizioni, ed appaiono finalmente come pure e semplici verità, coi piedi per terra e la testa sul collo.

[0]Testo di una conferenza al Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 29 Febbraio 1996.

Pitagora (secolo VI a.C.)

Pitagora (585–500 a.C.) considerava l'aritmetica come base dell'ordine del creato, o almeno della conoscenza di esso, e sintetizzava la sua filosofia nel motto "tutto è numero (razionale)". I numeri descrivevano la natura (dalle forme geometriche agli intervalli musicali), le leggi dei numeri riflettevano le leggi della natura, l'antitesi pari-dispari svolgeva un ruolo di paradigma degli opposti (analogo a quello contemporaneo cinese fra yang-yin), e la contemplazione mistica si raggiungeva attraverso la meditazione sui numeri (cioè facendo matematica).

La visione pitagorica fu messa in crisi dal primo paradosso della storia: l'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato, ossia l'impossibilità di ridurre ad un numero razionale una semplice parte della natura. La scoperta fu effettivamente traumatica, al punto che la sua rivelazione pubblica da parte di Ippaso di Metaponto gli procurò la radiazione dall'ordine, un mafioso avvertimento nella forma dell'erezione di una tomba in vita (la sede della scuola pitagorica era, dopotutto, la Calabria), e la morte per naufragio dietro intervento di Giove.

I greci non risolsero il paradosso, e decisero invece di ribaltare l'approccio di Pitagora: se la geometria non era riducibile all'aritmetica, si sarebbe ridotta l'aritmetica alla geometria. Ironicamente, essi avevano però i mezzi tecnici per la soluzione: la teoria delle proporzioni di Eudosso (408–355 a.C.) che, evitando di trattare direttamente con gli incommensurabili, li riduceva all'insieme delle loro approssimazioni razionali. Con un ulteriore ribaltone, nel 1872 Richard Dedekind[1] (1831–1916) definì come *numeri reali* gli insiemi di approssimazioni (nella forma di sezioni dei razionali, cioè di divisioni dei razionali in due insiemi disgiunti, esaustivi, e chiusi rispettivamente uno all'insù e l'altro all'ingiù).

Nel momento dell'introduzione della nozione più generale di numero reale, l'argomento dei pitagorici cessa di essere un paradosso e diventa la dimostrazione del teorema che $\sqrt{2}$ *è irrazionale* (dove $\sqrt{2}$ è la sezione costituita dai razionali il cui quadrato è, rispettivamente, minore o maggiore di 2). Ma l'eco del paradosso rimane ancora oggi nelle parole 'irrazionale' e 'assurdo': la prima deriva da *ratio*, cioè 'rapporto', e significa letteralmente 'non esprimibile mediante una frazione'; la seconda deriva da *surdus*, che è il nome

[1] Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zhalen*, 1872, tradotto in *Scritti sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, 1982, pp. 63–78.

con cui si chiamano le radici $\sqrt{a}$ con a non quadrato, e significa 'derivabile dall'irrazionale'.

Zenone (secolo V a.C.)

Achille e la tartaruga contendono al mentitore la palma di protagonisti del paradosso più famoso e e venerabile. Essi compaiono in uno degli argomenti concepiti da Zenone di Elea (secolo V a.C.) a sostegno della tesi parmenidea dell'impossibilità del divenire in tutte le sue forme, in particolare in quella del moto.

Più precisamente, se Achille sfida la tartaruga alla corsa concedendole un handicap non riuscirà mai a raggiungerla, perchè mentre egli colma il vantaggio che le ha concesso la tartaruga ha percorso un'altra distanza, mentre Achille colma questa distanza la tartaruga ne ha percorsa un'altra, e così via.

Un argomento analogo di Zenone si presta meglio ad un trattamento matematico: non si può percorrere nessuna distanza non nulla perchè prima si deve percorrerne metà, poi metà della rimanenza, e così via, senza poter mai completare il processo.

I problemi degli eleatici e dei pitagorici si riducevano in sostanza, ed in maniera complementare, all'infinito: da un lato, un segmento finito quale la diagonale di un quadrato risultava scomponibile all'infinito per divisione rispetto al lato; dall'altro, un segmento finito arbitrario risultava scomponibile all'infinito per bisezione. In entrambi i casi, il paradosso nasceva dall'apparente impossibile coesistenza di finito e infinito in uno stesso ente.

Invece di affrontare il problema, i greci preferirono rimuoverlo. In particolare Archimede (287–212 a.C.), che dovette calcolare direttamente somme di serie anche complicate come

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{4}{3}$$

per il calcolo di aree e volumi (nel caso specifico, l'area di un segmento parabolico), preferì sempre riformulare a posteriori i suoi argomenti in termini di indirette dimostrazioni per assurdo.

Fu soltanto nel 1647 che Gregorio di San Vincenzo (1584–1667) legittimò, nell'*Opus geometricum*, il concetto di convergenza di una serie infinita, e considerò esplicitamente il paradosso di Zenone come una dimostrazione di convergenza di una serie geometrica, cioè del teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1.$$

Eubulide (secolo IV a.C.)

Epimenide di Creta (VI secolo a.C.) sembra aver detto: "tutti i cretesi sono bugiardi". Benchè questa formulazione non sia un paradosso essa vi si avvicina pericolosamente, e fu Eubulide di Mileto (IV secolo a.C.) a portarla a compimento: dicendo "io sto mentendo", o "questa frase è falsa", si producono infatti veri paradossi.

Le discussioni del paradosso del mentitore nei secoli sono state innumerevoli quanto le sue versioni e le proposte di soluzione. Fra esse c'erano quelle che sostenevano che le frasi in questione non hanno semplicemente senso, perchè coinvolgono una confusione fra uso e menzione: di queste ha fatto giustizia nel 1931 Kurt Gödel[2] (1906–1978), che ha mostrato come in realtà esse si possono costruire in maniera perfettamente sensata.

Più precisamente, data una qualunque proprietà P esprimibile nel linguaggio, la frase

"ha la proprietà P se preceduta dalla sua menzione"
ha la proprietà P se preceduta dalla sua menzione,

in cui la menzione è esplicitamente indicata dalla presenza delle virgolette e l'uso dalla sua mancanza, dice "io ho la proprietà P".

L'argomento del paradosso del mentitore mostra allora che se la proprietà di essere falsa è esprimibile nel linguaggio, la frase precedente (che dice appunto "io sono falsa") è contraddittoria: nel caso di sistemi formali matematici basati sulla logica si può dunque dedurre che o essi sono contraddittori, o la falsità (e quindi anche la verità, a causa della presenza della negazione) non è esprimibile nel sistema stesso. In termini leggermente più tecnici, *in un sistema formale consistente la verità non è definibile.*

Simmetricamente, in un sistema in cui la (non) dimostrabilità sia definibile è possibile produrre una frase che dice "io non sono dimostrabile". Se il

[2]Kurt Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematick und Physik*, 38 (1931) 173–198, tradotto ne *Il teorema di Gödel*, a cura di S.G. Shanker, Muzzio, 1991, pp. 23–62.

sistema dimostra soltanto affermazioni vere esso non può dunque dimostrare tale frase, che è allora vera: esistono quindi affermazioni vere ma non dimostrabili. Si ottiene così una formulazione del famoso teorema di Gödel, secondo cui un sistema formale in cui la (non) dimostrabilità sia definibile, e che dimostri soltanto affermazioni vere, non può dimostrarle tutte: in termini più tecnici, *un sistema formale sufficientemente espressivo e corretto è incompleto*.

Duns Scoto (secolo XIII)

L'atteggiamento greco di non considerare l'infinito attuale come esistente incominciò ad essere gradualmente rivisto a partire dal medioevo, non senza tenaci resistenze.

Un esempio di queste è l'argomento del 'dottor sottile' Giovanni Duns Scoto (1266–1308), rivolto a dimostrare che le curve geometriche non si possono considerare composte di punti infinitesimi. Se così fosse, infatti, due qualunque circonferenze (ad esempio, una minuscola ed una gigantesca) dovrebbero avere lo stesso numero di punti, come si vede muovendole dapprima in modo da far sovrapporre i loro centri, e poi mettendo in corrispondenza i punti che stanno sugli stessi raggi.

Una confutazione dell'argomento fu tentata nel 1638 da Galileo Galilei (1564–1642) nella prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, in verità in modo assai poco convincente: sostenendo cioè che punti aventi le stesse dimensioni e in numero uguale possono costituire circonferenze "minori della luce dell'occhio di una pulce, o maggiori dell'equinoziale del primo mobile", a seconda che essi siano più o meno ravvicinati.

In maniera matematicamente più interessante, Bernard Bolzano (1781–1848) nel libro postumo del 1851 *I paradossi dell'infinito*, e Georg Cantor (1845–1918) nel 1878,[3] rivoltarono la frittata e *definirono* come aventi lo stesso numero di elementi due insiemi che si possono mettere in corrispondenza biunivoca fra loro. L'argomento di Scoto diventa allora la dimostrazione del teorema che effettivamente *due circonferenze hanno lo stesso numero di punti*.

La definizione di Bolzano e Cantor è un esempio di soluzione di un para-

[3]Georg Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84 (1878) 242–258.

dosso per accettazione, e non elimina la sensazione di fastidio nel considerare due insiemi di grandezza intuitiva diversa come aventi la stessa grandezza matematica, fino a quando l'intuizione non venga sostanzialmente rieducata dalla pratica. Lo stesso Cantor, ad esempio, quando dimostrò che secondo la sua definizione un segmento ed un quadrato hanno lo stesso numero di punti, non potè fare a meno di ammettere: "lo vedo, ma non ci credo".

Cardano (1545)

La soluzione dell'equazione generale di terzo e quarto grado mediante radicali fu la grande sceneggiata matematica del secolo XVI, e coinvolse Scipione del Ferro (1465–1526), Niccolò Fontana (1499–1557), detto Tartaglia a causa dei postumi di una ferita infantile, Gerolamo Cardano (1501–1576) e Ludovico Ferrari (1522–1565): i primi due trovarono indipendentemente come risolvere il caso speciale in cui manca il termine di secondo grado, il terzo come ridurre il caso generale a quello speciale, e l'ultimo come ridurre il quarto grado al terzo. La sceneggiata derivò dal fatto che Tartaglia aveva comunicato il suo risultato a Cardano a condizione che egli lo tenesse segreto, il che impedì per anni la divulgazione dei successivi risultati sia di Cardano che di Ferrari: quando Cardano venne a sapere della soluzione di Scipione egli pubblicò il tutto nell'*Ars magna* (1545), scatenando una reazione furibonda di Tartaglia.

Un paradosso stava comunque nascosto dietro la formula per la risoluzione della cubica: essa faceva intervenire radicali quadratici e cubici che a volte potevano coinvolgere numeri negativi. Ora, i numeri negativi erano già problematici di per se: ad esempio, tre capitoli successivi del libro di Cardano erano dedicati alla soluzione dei tre 'diversi' tipi di equazione

$$x^3 + mx = n \qquad x^3 = mx + n \qquad x^3 + n = mx,$$

dove i coefficienti m ed n erano sempre positivi.[4] Non parliamo dunque delle *radici* di numeri negativi!

[4] Si ricordi, a proposito di numeri negativi e paradossi, che ancora nel secolo XVII John Wallis (1616–1703) si chiedeva come potesse una quantità essere meno che niente, e dimostrava che i numeri negativi sono maggiori di infinito perchè se a è positivo allora $\frac{a}{0} = \infty$, e quando il denominatore di una frazione diminuisce il quoziente aumenta. Dal canto suo, Antoine Arnauld (1612–1694) vedeva un problema nell'uguaglianza $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, perchè il rapporto di una quantità più grande con una più piccola non può essere uguale al rapporto di una quantità più piccola con una più grande.

Naturalmente, anche la soluzione dell'equazione di secondo grado faceva intervenire radici quadrate di numeri che potevano essere negativi: ma questo significava semplicemente che non c'erano soluzioni (reali). Nel caso dell'equazione cubica invece almeno una soluzione reale esiste sempre, e quindi il problema non poteva essere rimosso facilmente. Ad esempio, l'equazione

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

ha solo radici reali (precisamente, 4 e $-2 \pm \sqrt{3}$), ma la formula dà come soluzione

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}.$$

Mentre Cardano menzionò soltanto la possibilità di considerare *numeri complessi*, scartandola perchè essi erano "sottili ed inutili", Raffaele Bombelli (1526–1573) fu il primo a vedere tali espressioni come un ponte immaginario fra le equazioni cubiche a coefficienti reali e le loro soluzioni reali. Nell'*Algebra* del 1572 egli notò che

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121},$$

e analogamente

$$(-2 + \sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-1}.$$

Quindi

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4.$$

Come già nel caso dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, anche la formula per la soluzione dell'equazione cubica portò dunque all'introduzione di un nuovo tipo di numeri, che da un lato si rivelarono essere fondamentali per lo sviluppo della matematica, ma che dall'altro continuarono a portare nel loro nome di 'immaginari' il ricordo dei problemi che essi avevano generato in origine.

Fermat (1629)

Nel 1629 Pierre de Fermat (1601–1665) introdusse un metodo per trovare tangenti e risolvere problemi di massimo e minimo, che nel giro di due secoli si sarebbe poi pienamente sviluppato nel calcolo differenziale. Il metodo si basava sull'uso di quantità evanescenti dette *infinitesimi*, che si supponevano essere non nulle ma piccole a piacere (cioè maggiori di 0, ma minori di $\frac{1}{n}$ per ogni n).

Un esempio dell'uso paradossale che veniva fatto degli infinitesimi è illustrato dal modo in cui Fermat calcolò la derivata di x^2, come rapporto incrementale:

$$\frac{dx^2}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2xdx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx = 2x.$$

Qui dx viene considerato diverso da 0 quando lo si semplifica come divisore, ma uguale a 0 quando poi lo si elimina alla fine: questo procedimento sollevò seri dubbi sulla consistenza del calcolo stesso, soprattutto nel periodo di crescita impetuosa in cui l'attività dei matematici si concentrò più sull'edificio che sui fondamenti.

La critica più spietata venne dal vescovo George Berkeley (1685–1753), che non si lasciò scappare l'occasione di tirar acqua al suo mulino, e pubblicò nel 1734 un'opera di cui almeno il titolo è un capolavoro: *L'analista, ovvero discorso indirizzato a un matematico infedele, dove si esamina se l'oggetto, i princìpi e le conclusioni dell'Analisi moderna siano più chiaramente concepiti, o dedotti in modo più evidente, dei misteri della religione e degli articoli di fede. "Prima estrai la trave dal tuo occhio, e poi ci vedrai chiaramente per estrarre la pagliuzza dall'occhio del tuo fratello."*

Berkeley parlava degli infinitesimi come di "fantasmi di quantità decedute", e del procedimento sopra descritto come di "un doppio errore che genera forse una verità, ma certo non una scienza". L'ultima osservazione rispondeva alla debole difesa dei matematici, che potevano solo limitarsi a notare che il calcolo dava risultati corretti ed utili.

Il secolo XIX vide una rimozione degli infinitesimi da parte di Augustin Louis Cauchy (1789–1857) nel 1821, che nel suo *Corso di analisi algebrica* definì i rapporti incrementali in termini non di infinitesimi ma di limiti di quantità finite: nel caso dell'esempio precedente si otteneva così

$$\frac{dx^2}{dx} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x+\epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2x\epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} (2x + \epsilon) = 2x.$$

In tal modo la semplificazione di dx viene sostituita con quella di ϵ, che è effettivamente una quantità diversa da 0, mentre la eliminazione di dx viene sostituita con un limite per ϵ tendente a 0, senza mai richiedere di considerarlo uguale a 0.

A coloro che potevano pensare che la soluzione di Cauchy spostasse soltanto il problema dagli infinitesimi ai limiti, rispose Karl Weierstrass (1815–1897) a metà del secolo XIX con la sua famosa definizione di limite in termini di ϵ e δ. La soluzione era però amara per la memoria dei padri fondatori del calcolo, che vedevano rivendicati i loro risultati ma non i loro metodi.

La riabilitazione dei metodi venne soltanto nel 1965, da parte di Abraham Robinson (1918–1974). Nel suo libro *Analisi non standard* egli mostrò che la logica matematica, in particolare il cosiddetto teorema di compattezza, permette di trovare una classe di numeri *iperreali* che, pur contenendo oltre ai numeri reali soliti anche le loro varianti infinitesime (in modo analogo a quello in cui i numeri reali contengono oltre ai numeri interi anche le loro varianti decimali), ha le stesse proprietà dei numeri reali. Nell'ambito dei numeri iperreali il calcolo di Fermat della derivata di x^2, così come i procedimenti degli analisti stigmatizzati da Berkeley, diventano perfettamente corretti: ad esempio, dx è effettivamente diverso da 0 e si può quindi dividere per esso; e benchè $2x + dx$ e $2x$ siano numeri iperreali diversi, essi hanno la stessa parte reale (come due numeri decimali possono essere diversi, ma avere la stessa parte intera), e sono quindi uguali dal punto di vista dei numeri reali.

Galileo (1638)

Nella già citata prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, Galileo affronta un articolato discorso sull'infinito. In particolare, egli enuncia chiaramente il paradosso secondo cui nell'infinito il tutto non è necessariamente maggiore della parte: ad esempio, i quadrati sono tanti quanti i numeri interi, perchè basta mettere in corrispondenza ciascun numero n col suo quadrato n^2.

Galileo prese la sua scoperta troppo seriamente, sostenendo ad esempio che essa mostrava che non ha senso dire di due insiemi infiniti che uno è maggiore dell'altro. Ma egli si era comunque imbattuto in una proprietà fondamentale degli insiemi infiniti: quella di contenere cioè una parte propria con lo stesso numero di elementi del tutto.

Più o meno nello stesso periodo, gli anni '80 del secolo XIX, Charles Peirce e Richard Dedekind[5] proposero indipendentemente di considerare tale pro-

[5] Charles Peirce, "On the algebra of logic, a contribution to the philosophy of notation",

prietà come caratteristica degli insiemi infiniti, prendendola come definizione.

Questa definizione è equivalente a quella solita, secondo la quale un insieme è infinito se il numero dei suoi elementi non è finito (cioè se esso non ha n elementi, per nessun intero n). Ma la dimostrazione dell'equivalenza richiede il cosiddetto assioma della scelta, che permette di effettuare scelte arbitrarie. In mancanza di tale assioma, i due concetti sono invece distinti, e possono esistere insiemi che da un lato non hanno n elementi per nessun n, ma dall'altro non contengono una parte propria con lo stesso numero di elementi del tutto: essi sono infiniti nel senso solito ma finiti in quello di Peirce e Dedekind, ed appartengono dunque ad una specie intermedia.

Grandi (1703)

Grazie all'approccio di Newton al calcolo infinitesimale, che consisteva nell'espandere funzioni in serie che erano poi differenziate o integrate termine a termine, la nozione di somma infinita cessò di essere considerata paradossale, e si accettò l'idea che ad essa potesse corrispondere un numero finito. La serie alternata

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

fu forse quella che fece più discutere nel settecento. Ridisponendo le parentesi, essa provoca infatti l'indisponente paradosso

$$0 = (1-1) + (1-1) + \cdots = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1.$$

Guido Grandi (1671–1742) non solo accettò di buon grado il risultato ma sostenne, nel *Quadratura circuli et hyperbolae* (1703), che questo era una spiegazione del modo in cui Dio aveva creato il mondo dal nulla (l'affermazione avrebbe dovuto suonare blasfema, visto che riduceva la creazione ad un fatto parentetico). Il buon Guido andò comunque oltre, e dalla formula per la somma delle progressioni geometriche

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

American Journal of Mathematics, 7 (1885) 180–202, e Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888, tradotto in *Scritti sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, 1982, pp. 79–128.

dedusse, ponendo $x = -1$, che

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) sostenne che questo era effettivamente il vero valore della serie, sulla base del fatto che le somme parziali alternano 1 e 0, e il valore più probabile è dunque la loro media aritmetica: un ragionamento che, giustamente, egli ammise essere più metafisico che matematico (aggiungendo però che la matematica era comunque più metafisica di quanto si ammettesse).

Leonhard Euler (1707–1783) concordò sul fatto che $\frac{1}{2}$ fosse il vero valore della serie, con la diversa motivazione che il ragionamento di Grandi riduceva la serie infinita ad una formula finita, e che questo era il modo corretto di dar senso alle serie infinite. Egli si lasciò però prendere la mano dall'entusiasmo e notò che, ponendo $x = 2$ nella formula precedente, si ottiene l'ancora più eccitante

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots ,$$

in cui infiniti numeri positivi hanno una somma negativa.

Jean Charles Callet (1744–1799) mostrò che l'idea di Euler, di ridurre le serie infinite a formule finite, era ambigua. Una stessa serie poteva infatti corrispondere a più formule differenti, come mostrava

$$\frac{1}{1 + x + x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - \cdots ,$$

da cui si poteva dedurre il valore $\frac{1}{3}$ per la solita serie alternata.

Questi incredibili argomenti sono naturalmente da valutare in prospettiva: i paradossi da essi generati permisero di arrivare in seguito alla definizione precisa di *somma di una serie*, come limite delle somme parziali, ed alla realizzazione che le ambiguità precedenti derivano appunto dal voler assegnare una somma definita a serie divergenti.

La parola fine alla storia della serie alternata fu posta nel 1828 da Niels Henrik Abel (1802–1829): tornando alla teologia da cui Grandi era partito, egli dichiarò che le serie divergenti erano in realtà un'invenzione del diavolo, e come tali andavano quindi trattate.

Leibniz e Johann Bernoulli (1712)

Discutendo di problemi legati all'integrazione di funzioni razionali, nel 1712 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) e Johann Bernoulli (1667–1748) diedero vita ad una disputa epistolare sul significato dei logaritmi di numeri negativi e complessi, in particolare di $\log(-1)$.

Bernoulli dimostrò che $\log -1$ doveva essere reale, ed in particolare uguale a 0: infatti, da $(-x)^2 = x^2$ segue $2 \cdot \log(-x) = 2 \cdot \log x$, e quindi $\log(-x) = \log x$, da cui $\log(-1) = \log 1 = 0$.

Leibniz dimostrò invece che $\log(-1)$ non può essere reale: altrimenti da

$$\frac{1}{2} \cdot \log(-1) = \log \sqrt{-1} = \log i,$$

discenderebbe che $i = e^{\log i}$ stesso è reale.

Nel 1749 Euler[6] trovò l'inaspettata soluzione della contraddizione. Da $e^{i\pi} = -1$, si ha che $\log(-1) = i\pi$ è effettivamente immaginario; ma poichè in generale $e^{i(\pi+2\pi n)} = -1$, si ha che $\log(-1) = i(\pi + 2\pi n)$, e quindi che *il logaritmo è una funzione a più valori*: più precisamente, ad infiniti valori complessi.

Jakob Bernoulli (1713)

Si dice che a San Petersburg esistesse, al tempo degli zar, un casinò che permetteva di giocare qualunque qualunque gioco d'azzardo, in cambio di un prezzo. Il casinò era ad esempio disposto a pagare 2^n rubli se, quando il giocatore tirava una moneta, usciva testa per la prima volta all'n-esimo tiro: quanto avrebbe dovuto essere disposto un giocatore a pagare, per poter partecipare al gioco?

Da un lato, la probabilità che esca testa all'n-esimo tiro è $\frac{1}{2^n}$, perchè ad ogni tiro la probabilità è $\frac{1}{2}$, e le probabilità si moltiplicano: una misura di quanto il giocatore può guadagnare in tal caso è dato da quanto guadagnerebbe moltiplicato per la probabilità di guadagnarlo, cioè

$$2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1.$$

[6] Leonard Euler, "De la controverse entre Messrs Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes négatifs et imaginaires", *Histoire de l'Académie Royale de Berlin*, 5 (1749) 139–179.

Una misura di quanto il giocatore può guadagnare nel gioco si ottiene sommando quanto egli può guadagnare in ciascuna possibilità: ma poichè ci sono infinite possibilità (una per ciascun n), si ottiene in tal caso

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots \ = \ 1 + 1 + 1 + \cdots \ = \ \infty.$$

Il giocatore dovrebbe dunque essere disposto a giocarsi tutto quello che ha, pur di poter partecipare al gioco.

Dall'altro lato, supponiamo che il giocatore abbia un capitale di X rubli, e consideriamo l'unico a tale che $2^{a-1} \leq X < 2^a$: il giocatore può vincere una somma maggiore di X all'n-esimo tiro solo se $2^n > X$, cioè se $n \geq a$, e la probabilità che questo avvenga è $\frac{1}{2^n}$. La probabilità che egli vinca una somma maggiore di X è dunque

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^{a+1}} + \frac{1}{2^{a+2}} + \cdots \ = \ \frac{1}{2^a}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right] \ = \ \frac{1}{2^a} \cdot 2 \ < \ \frac{2}{X}.$$

In altre parole, più si gioca e meno ci si può aspettare di guadagnare.

La soluzione del problema proposta da Jakob Bernoulli (1654–1705), nell'*Ars conjectandi* (pubblicata postuma nel 1713), fu di assegnare al denaro una misura decrescente di *utilità*, sulla base del principio secondo cui il valore del denaro non è assoluto, ma dipende da quanto se ne ha: una stessa somma vale di più per chi ha poco, e di meno per chi ha tanto.[7] Ad esempio, assegnando una funzione di utilità logaritmica (in base 2) si ha che l'utilità di una somma di 2^n rubli è solo n, e quindi il giocatore si può aspettare di guadagnare soltanto

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots \ = \ 2.$$

Poichè 2 è l'utilità che si assegna alla somma di $4 = 2^2$ rubli, il giocatore non dovrebbe essere disposto a giocarsi più di 4 rubli per poter partecipare al gioco.

Il paradosso di San Petersburg, come esso viene chiamato, ha dunque stimolato l'introduzione della nozione di utilità, che è divenuta comune nell'economia. Il problema è, naturalmente, che la particolare misura proposta da

[7] In altre parole, costa di più accontentare un ricco che molti poveri: questa può essere un'ottima giustificazione per distribuire la ricchezza in basso, invece che in alto, perchè essa viene spesa meglio.

Bernoulli ha il solo scopo tecnico di rendere convergente la serie considerata: la ricerca si è quindi concentrata sul più difficile problema di definire una misura di utilità che sia adeguata.[8]

Kant (1781)

Nel 1781 Immanuel Kant (1724–1804) pubblicò la *Critica della ragion pura*, il cui assunto principale era che le pretese di completezza della ragione sfociano necessariamente nell'inconsistenza. In particolare, il quarto degli argomenti kantiani a sostegno di questa tesi passava attraverso l'antinomia della causa prima ("io sono la mia causa"): da un lato, senza di questa la catena delle cause sarebbe infinita; dall'altro, la nozione di causalità richiede che la causa e l'effetto siano distinti, e la causa prima è dunque un concetto autocontraddittorio.

Le due parti dell'antinomia kantiana si fondano, rispettivamente, su concezioni dell'infinito e dell'autoreferenza che gli sviluppi della matematica hanno mostrato essere inadeguate. Ma sia l'assunto che il principio di dimostrazione di Kant sono stati annessi dalla moderna logica matematica.

Anzitutto, l'affermazione che la completezza implica l'inconsistenza equivale per contrapposizione all'enunciato del teorema di Gödel, secondo cui *la consistenza implica l'incompletezza*. E la dimostrazione di Gödel si basa, in modo analogo a quella di Kant, sulla costruzione di una affermazione autoreferenziale ("io non sono dimostrabile"), la dimostrabilità della quale è autocontradditoria in sistemi che dimostrino soltanto affermazioni vere.

Inoltre, nel 1942 Haskell Curry[9] (1900–1982) ha costruito una forma logi-

[8] Una metamorfosi del paradosso di San Petersburg è il cosiddetto *paradosso di Olbers*, del 1823. Supponiamo che l'universo, euclideo ed infinito, contenga una distribuzione uniforme di stelle identiche: le stelle contenute in uno strato sferico attorno alla terra di raggio r sono in numero proporzionale alla superficie dello strato, cioè ad r^2, ma la loro luminosità decresce in modo proporzionale ad r^2, e quindi ogni strato contribuisce una quantità fissa non nulla alla luminosità totale del cielo. Esso dovrebbe dunque apparire infinitamente luminoso, mentre appare invece buio la notte!

La soluzione data dalla teoria cosmologica dell'espansione dell'universo è simile a quella di Bernoulli: la luminosità apparente è inversamente proporzionale al quadrato della distanza solo per stelle fisse, ma è inferiore per stelle che si allontanano da noi, con un fattore correttivo che permette alla serie in questione di convergere.

[9] Haskell Curry, "The inconsistency of certain formal logics", *Journal of Symbolic Logic*, 7 (1942) 115–117.

camente corretta dell'antinomia della causa prima, intesa come una formula A che equivale ad $A \to B$ per ogni B. Da una parte, di una tale formula si può dimostrare che è vera: essendo essa equivalente ad $A \to B$, basterà dimostrare che da A segue B; supponiamo allora A, e dunque anche $A \to B$ (visto che le due sono equivalenti); da esse segue B per *modus ponens*. Dall'altra parte, la conclusione che A è vera è contraddittoria: infatti lo sono allora sia $A \to B$, ad essa equivalente, che B, che segue da entrambe; ma B è una formula qualunque, ed in particolare può essere scelta falsa.

L'argomento di Curry mostra che *la logica è incompatibile con l'assunzione di una causa prima*: se questa esiste in un sistema (il che avviene quando esso ammette punti fissi per ogni operatore, come nel caso del λ-calcolo discusso più oltre), allora il sistema è incompatibile con la logica (e, anzi, già con le poche proprietà dell'implicazione usate per l'argomento di Curry).

Dirichelet (1829)

Benchè i greci conoscessero ovviamente alcune curve specifiche quali le sezioni coniche e la spirale, essi non ebbero mai la necessità di considerare la nozione di funzione in modo sistematico. Questa necessità sorse invece con la nascita della scienza moderna: lo studio del moto richiedeva infatti di considerare una vasta classe di curve, comprendente in modo naturale la parabola, l'ellisse e la cicloide (quali traiettorie di un proiettile, di un pianeta o di un punto su una ruota che scorre).

Per un lungo periodo l'unico modo permesso di definire funzioni fu attraverso *formule*, anche se la classe di queste si arricchì costantemente con lo sviluppo della matematica: nel secolo XVII Descartes richiedeva di limitarsi ad equazioni algebriche, cioè a polinomi di grado arbitrario in x ed y; nel secolo XVIII Euler, motivato dallo studio della corda vibrante, permise la considerazione di espressioni analitiche comprendenti funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche (che Euler vedeva come versioni infinitarie di funzioni algebriche, attraverso espansioni in serie di potenze); nel secolo XIX Joseph Fourier (1768–1830), motivato a sua volta dallo studio del calore, incluse infine anche le serie trigonometriche.

Fu proprio nel tentativo di dimostrare la tesi fondamentale di Fourier, che cioè ogni funzione si potesse rappresentare in un intervallo mediante una serie trigonometrica, che Peter Dirichelet (1805–1859) trovò da un lato alcune condizioni sufficienti, ma definì dall'altro nel 1829 un famoso esempio di funzione non rappresentabile:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa funzione era paradossale, appunto perchè non definita mediante formule di nessun genere, ma nel giro di pochi anni Dirichelet fece di necessità virtù: nel 1837 egli propose cioè la definizione di *funzione* che ancor oggi viene usata, come corrispondenza funzionale di y rispetto ad x (nel senso che a ciascun x corrisponde uno ed un solo valore della y), indipendentemente dal modo in cui questa corrispondenza viene definita.[10]

Il passaggio dalle funzioni definibili a quelle arbitrarie è in un certo senso analogo al passaggio dai numeri reali algebrici a quelli arbitrari: in entrambi i casi si provoca un incremento esponenziale del numero di elementi, la maggior parte dei quali sarà comunque inaccessibile alle descrizioni, proprio a causa della limitatezza numerica di queste.

In pratica, però, le funzioni ed i numeri di uso comune tendono ad essere definibili in qualche modo esplicito, e la stessa funzione di Dirichelet non fa eccezione: essa è infatti risultata essere rappresentabile analiticamente come

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \cos\,(m!\pi x)^n.$$

Dirichelet (1843)

La teoria dei numeri è la regina della matematica, diceva Carl Gauss (1777–1855), che a sua volta veniva chiamato il principe dei matematici: se il re della matematica è il metodo di generalizzazione, la famiglia reale non poteva che concepire una generalizzazione della teoria dei numeri ad opera di Gauss stesso. E infatti, nella seconda decade del secolo XIX egli introdusse gli interi complessi del tipo $m + ni$ con m ed n interi (relativi), e provò che essi soddisfano a proprietà analoghe a quelle degli interi soliti, compreso il teorema di decomposizione unica in fattori primi.

Naturalmente, le nozioni della teoria degli interi complessi devono essere appropriatamente generalizzate. Ad esempio, le unità sono ora, oltre ad 1 e -1, anche i e $-i$; ed i numeri primi sono quelli che non si possono

[10] Peter Dirichelet, "Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen", *Repertorium der Physik*, 1 (1837) 152-174.

decomporre in prodotti i cui fattori siano diversi da essi stessi e dalle unità. In particolare, molti numeri che sono primi come interi, cessano di esserlo come interi complessi: ad esempio,

$$2 = 1 + 1 = (1 + i)(1 - i) \qquad \text{e} \qquad 13 = 9 + 4 = (3 + 2i)(3 - 2i).$$

La idee di Gauss furono riprese da Ernst Kummer (1810–1893), che estese la teoria dai numeri del tipo $m + ni$ a quelli del tipo $m + n\alpha$ per α algebrico (soluzione cioè di polinomi a coefficienti interi), e nel 1843 usò la decomposizione unica in fattori primi di tali numeri (e loro estensioni) per dimostrare l'ultimo teorema di Fermat.

Dirichelet notò però che, purtroppo per Kummer, la fattorizzazione non era sempre unica: ad esempio, nel caso di $\alpha = \sqrt{-5}$,

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}),$$

e tutti e quattro i fattori sono primi. L'osservazione era tanto inaspettata da apparire paradossale, come prova il fatto che anche altri (fra cui Cauchy) erano in precedenza cascati nello stesso errore di Kummer.

Questi intravide però una scappatoia: nel caso precedente, basta considerare i numeri

$$\sqrt{2} \qquad \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \qquad \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

per ottenere

$$6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}},$$

questa volta in maniera unica.[11] L'unico problema è che i tre nuovi primi non sono del tipo $m + n\sqrt{-5}$: Kummer, che prima di diventare matematico era stato un teologo, li chiamò quindi *numeri ideali* (rispetto al dominio dato). Mediante essi egli fu comunque in grado di dimostrare vari casi del teorema di Fermat (in particolare, per ogni esponente fino a 100), benchè non più tutti.

La teoria fu sistematizzata da Dedekind nel 1871, in un'appendice al libro di Dirichelet *Teoria dei numeri*. In modo analogo a quello con cui aveva definito i reali come insiemi di razionali, questa volta egli definì gli *ideali* di un

[11] Si noti che i precedenti quattro primi diventano ora fattorizzabili: $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, $3 = \frac{6}{2} = \frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$, e $1 \pm \sqrt{-5} = \sqrt{2} \cdot \frac{1\pm\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$.

anello come insiemi di suoi elementi: invece di parlare di nuovi divisori ideali come Kummer, egli considerò cioè insiemi di possibili multipli, caratterizzati dal fatto di essere chiusi rispetto a combinazioni lineari (l'intuizione essendo che se un numero ideale divide un elemento, divide anche ogni suo multiplo; e se divide due elementi, divide anche la loro somma).

Ad esempio, invece di considerare un intero n egli considerò l'ideale principale (n) costituito da tutti i suoi multipli, e definì il prodotto di ideali in modo tale che $(n) \cdot (m) = (n \cdot m)$, così che l'ideale (n) divide l'ideale $(n \cdot m)$, benchè come insieme esso sia più grande (perchè ogni multiplo di $n \cdot m$ è un multiplo di n).

Sostituendo i numeri con ideali, ed i numeri primi con ideali primi (definiti originariamente appunto come ideali indivisibili), Dedekind potè dimostrare un analogo del teorema fondamentale dell'aritmetica: sotto certe condizioni generali, ogni ideale di un anello si può decomporre in maniera unica come prodotto di ideali primi. Il paradosso di Dirichelet viene dunque da un lato risolto mediante un'estensione dagli elementi di un dominio ai suoi ideali, e dall'altro situato in prospettiva dall'osservazione che la decomposizione unica valeva già nel dominio di partenza se ogni ideale primo è principale (nel qual caso l'introduzione degli ideali si poteva in realtà evitare).

Möbius (1858)

Se si prende una striscia di carta rettangolare e si congiungono fra loro i due lati lunghi si ottiene un *cilindro*, che ha due facce (una esterna ed una interna) e due bordi (costituiti di due cerchi); se poi si congiungono fra loro gli estremi del cilindro (cioè i lati corti della striscia, ora piegati a formare un cerchio), si ottiene quello che si chiama un *toro*, che ha un esterno ed un interno ma nessun bordo.

Nel 1858 Augustus Möbius (1790–1868) scoprì che, congiungendo fra loro i due lati corti della striscia dopo averle però fatto fare mezzo giro, si ottiene una superficie paradossale nota appunto come *striscia di Möbius*: essa ha una sola faccia ed un solo bordo, e la si può percorrere interamente senza dover mai attraversare il bordo; inoltre, se si fa scorrere su di essa un cerchio che ruota parallelamente alla superficie in senso orario, alla fine di un percorso completo il cerchio ruoterà in senso antiorario, e sarà necessario un altro percorso completo per farlo ritornare a ruotare in senso orario; infine, se si taglia la superficie a metà parallelamente ai lati se ne ottengono non due dello stesso genere (come nel caso di una striscia rettangolare), ma una sola di lunghezza doppia e che non è più dello stesso genere (essa ha cioè due facce).

Nel 1882 Felix Klein (1849–1925) notò che anche la superficie che è l'analogo del toro nello stesso modo in cui la striscia di Möbius lo è del cilindro, oggi nota come *bottiglia di Klein*, è paradossale. Essa è più difficile da visualizzare, anche perchè la sua costruzione non si può fare nello spazio a tre dimensioni: si dovrebbero infatti congiungere fra loro gli estremi di un cilindro dopo aver però invertito l'orientamento di uno di essi (il che nello spazio tridimensionale si può fare solo penetrando all'interno del cilindro, mentre la superficie non deve avere autointersezioni). In ogni caso, la bottiglia di Klein ha una sola faccia e nessun bordo, ed in particolare non ha esterno o interno.

Lo studio delle proprietà delle superfici paradossali portò allo sviluppo della *topologia* da parte di Möbius stesso,[12] ed alla caratterizzazione completa delle superfici chiuse. La cosa interessante è che la striscia paradossale di Möbius è risultata essere cruciale per la caratterizzazione, che dice appunto che ci sono soltanto i seguenti tipi di superfici chiuse: per ciascun $n \geq 0$,

- la sfera con n manici aggiunti
- la sfera con n cerchi su di essa sostituiti da striscie di Möbius.

Si noti che il procedimento nei due casi è simile: aggiungere un manico significa sostituire due cerchi sulla sfera mediante un cilindro che li congiunge, e la striscia di Möbius è appunto l'analogo del cilindro (essa ha un solo bordo, che si può far combaciare sulla circonferenza del cerchio da sostituire). Inoltre, così come il toro è un esempio di sfera ad un manico, la bottiglia di Klein è un esempio di sfera con due cerchi sostituiti da striscie di Möbius (la superficie che si ottiene dalla sfera sostituendo un solo cerchio si chiama invece *piano proiettivo*).

Peano (1890)

Benchè la nozione di curva (nel piano) sia fondamentale in matematica, in particolare in geometria ed analisi, la sua prima vera definizione sembra essere

[12] Augustus Möbius, "Theorie der elementaren Verwandschaft", *Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 15 (1863) 18–57.

stata data solo nel 1887, nel *Cours d'analyse* di Camille Jordan: una curva è l'insieme dei punti le cui coordinate sono immagini di due funzioni reali continue di un parametro in un certo intervallo, ad esempio

$$\{(f(t), g(t)) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Forte della sua definizione, Jordan potè enunciare il teorema che oggi va sotto il suo nome: una curva chiusa e non autointersecantesi divide il piano in due parti connesse, una interna ed una esterna.

Nel 1890 Giuseppe Peano[13] (1858–1932) scoprì però che la definizione di Jordan è paradossale, nel senso che ad esempio una curva può riempire un intero quadrato. Il paradosso sta nel fatto che è implicito nella nozione di curva che essa debba in qualche modo essere un ente unidimensionale (già Euclide parlava al proposito di "lunghezza senza ampiezza"), mentre il quadrato è ovviamente bidimensionale.

Un esempio più semplice di una curva analoga a quella di Peano fu dato nel 1891 da David Hilbert[14] (1862–1943): si prende un segmento e lo si divide in quattro segmenti, numerandoli consecutivamente; si prende poi un quadrato e lo si divide in quattro quadrati, numerando anch'essi consecutivamente (in modo che sia possibile andare nell'ordine da uno all'altro mediante una poligonale che non si autointerseca); si ripete poi il procedimento su ciascuno dei quattro segmenti e dei quattro quadrati, ottenendo sedici segmenti e sedici quadrati che si numerano consecutivamente nel modo precedente, e così via. Le successive poligonali sono immagini continue del segmento iniziale nel quadrato, e la curva che ne è (l'unico) limite lo ricopre completamente.

I paradossi delle curve di Peano e Hilbert (uniti al risultato di Cantor citato in precedenza, secondo cui un segmento ed un quadrato hanno lo stesso numero di punti) reclamano una definizione di *dimensione*, che fu data in modo soddisfacente negli anni '20 da Karl Menger (1902–??) e Paul Urysohn[15] (1898–1924): uno spazio topologico ha dimensione n se n è il più piccolo numero intero tale che esiste una base di aperti la cui frontiera ha

---

[13] Giuseppe Peano, "Sur une curbe, qui remplit toute une aire plane", *Mathematische Annalen*, 36 (1890) 157–160.

[14] David Hilbert, "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück", *Mathematische Annalen*, 38 (1891) 459–460.

[15] Karl Menger, "Über die Dimensionalität von Punktmengen", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 33 (1923) 148–160, e Paul Uryson, "Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes", *Fundamenta Mathematicae*, 7 (1925) 30–137.

dimensione $n-1$. Ad esempio, per dimostrare che il piano (o un quadrato) ha dimensione ≤ 2 si può considerare la solita base data dai cerchi aperti, e ci si riduce a dimostrare che le loro frontiere, cioè le circonferenze, hanno dimensione 1; per dimostrare che una circonferenza ha dimensione 1 si può considerare la solita base data dai segmenti aperti, e ci si riduce a dimostrare che le loro frontiere, cioè le coppie di punti isolati, hanno dimensione 0; per dimostrare che una coppia di punti isolati ha dimensione 0, ci si riduce a dimostrare che la sua frontiera, cioè l'insieme vuoto, ha dimensione -1, e questo si assume per definizione.[16]

Una volta definita la dimensione, si può definire una *curva* come un insieme chiuso e connesso di dimensione 1. Il paradosso di Peano diventa allora il teorema che la sua corrispondenza tra il segmento unitario e il quadrato non definisce una curva.

Heaviside (1893)

Nel 1893 Oliver Heaviside (1850–1925) introdusse, in *Electromagnetic theory*, una funzione oggi nota come la *delta di Dirac*, che è definita dalle seguenti due proprietà:

$$\delta(x) = 0 \qquad \text{se } x \neq 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Presa di per se la δ è ovviamente paradossale: essa differisce soltanto in un punto dalla funzione costante 0, che ha integrale 0, e qualunque valore assegnato in quel punto non dovrebbe far cambiare il valore dell'integrale. Un solo valore, per giunta in(de)finito, contribuisce invece un'area finita.

Come Heaviside aveva notato, la δ permette però di esprimere derivate di funzioni discontinue. Ad esempio, essa stessa può essere considerata la derivata della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

[16] La dimostrazione del fatto che il piano non ha dimensione ≤ 1, e quindi ha esattamente dimensione 2, è più complicata.

come si può vedere dal fatto che

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon \qquad \text{e} \qquad g(x) = \lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon,$$

dove

$$\delta_\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{se } -\frac{\epsilon}{2} < x < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{se } x > \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g_\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2} & \text{se } -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 1 & \text{se } x > \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

(ovviamente δ_ϵ è la derivata di g_ϵ, e g_ϵ è l'integrale di δ_ϵ).

Le nozioni ed i procedimenti euristici usati da Heaviside sollevarono un grande scandalo fra i benpensanti matematici, ed egli fu addirittura espulso dalla *Royal Society of London* per indegnità teorica. Il risultato fu che oggi la δ viene associata non al suo nome ma a quello di Paul Dirac (1902–1984), che la usò nel suo classico *I principi della meccanica quantistica*, ricevendo peraltro la sua dose di severe critiche, in particolare da John von Neumann (1903–1957), autore di una formulazione matematica alternativa della meccanica quantistica.

Grazie alla reputazione di Dirac, la δ attecchì comunque immediatamente fra i fisici, e in seguito anche fra i matematici. L'idea di considerare funzioni improprie come possibili derivate di funzioni proprie fu sistematizzata negli anni '40, mediante la *teoria delle distribuzioni*. In particolare, è stato possibile dimostrare che ogni funzione continua in senso classico ha una distribuzione come derivata: questo include casi patologici come la curva di Koch (vedi oltre), che classicamente non ha invece derivata in alcun punto!

Royce (1899)

Nel 1899 il filosofo Josiah Royce (1855–1916), discutendo nell'appendice di *The world and the individual* il problema della coscienza, notava che l'immagine mentale che un individuo ha della propria mente deve essere infinita: essa deve infatti contenere un'immagine dell'immagine, la quale deve contenere un'immagine dell'immagine dell'immagine, e così via.

Astraendo dal problema della coscienza, Royce presentò una metafora paradossale del suo argomento che divenne immediatamente popolare:

> Immaginiamo che una porzione del suolo d'Inghilterra sia stata livellata perfettamente, e che in essa un cartografo tracci una

> mappa d'Inghilterra. L'opera è perfetta; non c'è particolare del suolo d'Inghilterra, per minimo che sia, che non sia registrato nella mappa; tutto ha lì la sua corrispondenza. La mappa, in tal caso, deve contenere una mappa della mappa, che deve contenere una mappa della mappa della mappa, e così all'infinito.

Spesso la metafora viene interpretata come una dimostrazione per assurdo dell'impossibilità di costruire una mappa perfetta, e citata a sostegno dell'altrettanto noto aforisma di Alfred Korzybski:[17] "la mappa non è il territorio".

In realtà, dal punto di vista matematico una mappa perfetta che contenga un'immagine di se stessa presenta non una contraddizione ma piuttosto una *contrazione*, nel senso che definisce una funzione f (su uno spazio metrico completo) tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|,$$

per qualche costante c maggiore di 0 e minore di 1. Stephan Banach (1892–1945) ha dimostrato nel 1922 che *una contrazione ha un unico punto fisso*:[18] infatti, per induzione

$$|f^{n+1}(x) - f^n(x)| \leq c^n \cdot |f(x) - x|,$$

e per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |f^{n+m}(x) - f^n(x)| &\leq \sum_{i<m} |f^{n+i+1}(x) - f^{n+i}(x)| \\ &\leq (\sum_{i<m} c^{n+i}) \cdot |f(x) - x|. \end{aligned}$$

Quindi la successione delle $f^n(x)$, e dunque anche quella delle $f^{n+1}(x)$, converge ad un punto x_0: ma poichè f è continua, la seconda successione converge anche ad $f(x_0)$, che deve allora essere uguale ad x_0; in altre parole, x_0 è un punto fisso di f. Se poi x_1 è un altro punto fisso, allora

$$|x_0 - x_1| = |f(x_0) - f(x_1)| \leq c \cdot |x_0 - x_1|,$$

e dall'ipotesi che c sia minore di 1 segue che $x_0 = x_1$, cioè che x_0 è l'unico punto fisso di f.

---

[17] Alfred Korzybski, *Science and sanity*, 1941.

[18] Stephan Banach, "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales", *Fundamenta Mathematicae*, 3 (1922) 7-33.

Nel caso della mappa perfetta, questo significa che ci deve essere un punto del territorio che coincide con la sua immagine sulla mappa: se anche la mappa non è il territorio in generale, essa lo è dunque in esattamente in un punto.

Russell (1902)

Nel 1902 Bertrand Russell[19] (1972–1970) scoprì un paradosso nella teoria degli insiemi intuitiva sviluppata da Georg Cantor e Gottlob Frege (1848–1925), e che nelle loro intenzioni avrebbe dovuto servire da fondamento dell'intera matematica.

Il ragionamento di Russell divide gli insiemi in due classi, a seconda che essi appartengano o no a se stessi, e considera l'insieme R di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi: se R appartenesse a se stesso, dovrebbe essere uno di quelli che non appartengono a se stessi; e se esso fosse uno di quelli che non appartengono a se stessi, dovrebbe appartenenere ad R.

In simboli, R è definito come l'insieme

$$R = \{x : x \notin x\},$$

cioè mediante la condizione

$$x \in R \iff x \notin x,$$

e quindi

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Il paradosso di Russell, sia per la sua semplicità che per l'opera di incessante propaganda fattane dal suo stesso autore, divenne il simbolo della crisi dei fondamenti della matematica di inizio secolo, e portò in particolare alla formulazione del sistema assiomatico per la teoria degli insiemi ancora oggi in voga.

Negli anni '30 però Alonzo Church (1903–1995) tentò un approccio alternativo ai fondamenti della matematica, basato questa volta non sul concetto di insieme ma su quello di funzione. I concetti basilari della teoria di Church erano analoghi a quelli della teoria di Cantor e Frege, secondo il seguente

[19] Bertrand Russell, "Letter to Frege", in *From Frege to Gödel*, Jean van Heijenoort curatore, Harvard University Press, 1967, pp. 124–125.

schema: una funzione corrisponde ad un insieme, un argomento di una funzione corrisponde ad un elemento di un insieme, l'applicazione di una funzione ad un argomento corrisponde all'appartenenza di un elemento ad un insieme, e la definizione di una funzione mediante una descrizione dei valori corrisponde alla definizione di un insieme mediante una proprietà.

Se ci fosse un operatore n che corrispondesse alla negazione, si potrebbe quindi riprodurre l'argomento di Russell nel modo seguente. Definiamo r come la funzione

$$x \longmapsto n(x(x)),$$

cioè mediante la condizione

$$r(x) = n(x(x)) :$$

allora

$$r(r) = n(r(r)).$$

Ma l'argomento in questo caso cessa di essere contraddditorio, per diventare semplicemente la dimostrazione del fatto che *nella teoria di Church tutte le funzioni n hanno un punto fisso.*

Questo fatto può essere interpretato negativamente, come l'impossibilità di inglobare la logica nella teoria di Church: in essa risulta infatti già impossibile trovare un analogo della negazione, che è ovviamente un operatore senza punti fissi (a tale conclusione si può giungere anche attraverso la versione di Curry dell'argomento della causa prima: una formula A che equivale ad $A \to B$ non è infatti altro che un punto fisso di $X \to B$).

Ma è più interessante interpretare il fatto positivamente, come la possibilità di salvaguardare le idee fondamentali della teoria intuitiva degli insiemi, semplicemente traducendole in una teoria delle funzioni che non pretenda di inglobare la logica. In tal modo la teoria (detta λ-calcolo) diventa il fondamento, benchè non dell'intera matematica, almeno della teoria delle funzioni astratte, e come tale della moderna informatica. E il paradosso di Russell, nella forma del teorema del punto fisso, ne diventa uno dei punti di forza essenziali.

Richard (1905)

Nel 1905 Jules Richard[20] (1862–1913) riformulò in forma paradossale l'argomento diagonale che Cantor aveva usato nel 1874 per dimostrare che l'insieme dei numeri reali non ha lo stesso numero di elementi dell'insieme dei numeri interi.[21]

Egli considerò le possibili definizioni finite dei numeri reali fra 0 ed 1, le enumerò mediante i numeri interi n, indicò con r_n il numero definito dall'n-esima definizione, e definì un nuovo numero reale r prendendo come sua n-esima cifra decimale una cifra diversa dall'n-esima cifra decimale del numero r_n: da un lato r è diverso da ogni r_n, perchè i loro sviluppi decimali differiscono sull'n-esima cifra; dall'altro lato r dovrebbe essere uguale a qualche r_n, perchè la sua definizione è finita.

Lo stesso Richard propose immediatamente una soluzione del suo paradosso, sostenendo che la definizione di r è solo apparentemente finita: essa coinvolge in realtà tutte le possibili definizioni finite, ed è dunque sostanzialmente infinita.

Nel 1906 Peano[22] sentenziò, nel colorito linguaggio che usava non solo nei suoi articoli ma anche a lezione: "exemplo de Richard non pertine ad mathematica, sed ad linguistica". In sostanza, la nozione di 'definizione finita' era per Peano soltanto una vuota espressione linguistica, e non un preciso concetto matematico: egli proponeva dunque drasticamente di dividere i paradossi in logico-matematici da una parte e linguistico-psicologici dall'altra, e di disinteressarsi poi di questi ultimi.

Benchè la proposta di Peano trovasse i favori di molti, essa era in realtà affrettata: il paradosso di Richard infatti 'pertineva ad mathematica' eccome! Il primo ad accorgersene fu Gödel: nell'introduzione al suo famoso articolo del 1931 egli notò esplicitamente che l'analogia dei suoi argomenti con quelli di Richard (e del mentitore) "saltava agli occhi".

Ma l'uso più esplicito e convincente del paradosso fu fatto nel 1936 da Alan Turing[23] (1912–1954). In termini moderni, egli considerò questa volta

---

[20]Jules Richard, "Les principes des mathématiques et le problème des ensembles", *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 16 (1905) 541.

[21]Georg Cantor, "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zhalen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77 (1874) 258–262.

[22]Giuseppe Peano, "Additione" a "Super theorema de Cantor-Bernstein", *Revista de mathematica*, 8 (1906) 143–157.

[23]Alan Turing, "On computable numbers with an application to the Entscheidungsprob-

non più le possibili definizioni finite nel linguaggio naturale, ma i possibili programmi (ad un solo argomento numerico) di un linguaggio di programmazione universale fissato, li enumerò mediante i numeri interi n, indicò con p_n l'n-esimo programma, e definì il programma p che sull'argomento n calcola il valore del programma p_n sullo stesso argomento, e poi restituisce un output diverso da quel valore.

Questa volta il programma p è certamente uno dei programmi p_n, per un certo n, perchè il linguaggio di programmazione è universale. E l'argomento di Richard diventa la dimostrazione che p non può avere un valore per l'argomento n: in altre parole, per difendersi dal paradosso la programmazione deve abbandonare le funzioni sempre definite di uso corrente nella matematica, ed introdurre *funzioni parziali* che possono anche essere indefinite sui loro argomenti.

Koch (1906)

Le definizioni di dimensione e curva date da Menger e Urysohn, pur soddisfacenti sotto molti aspetti, non escludono comunque curve paradossali in un senso più debole di quello di Peano, come mostrò nel 1906 Helge von Koch[24] (1870–1924).

Dato un triangolo equilatero si divida ciascuno dei 3 lati in tre, e sul terzo centrale si costruisca un triangolo equilatero; si ripeta poi il procedimento su ciascuno dei 12 segmenti della poligonale ottenuta, e così via: al limite si ottiene una curva che ha lunghezza infinita, perchè ad ogni passo ciascun lato della poligonale viene sostituito con uno di lunghezza uguale a $\frac{4}{3}$ di quello originale.

Il paradosso questa volta sta nel fatto che è implicito nella nozione di curva chiusa che essa debba debba in qualche modo avere lunghezza finita. Più precisamente, se si attribuisce ad un insieme di punti limitato dimensione 1 se esso ha una lunghezza finita non nulla, e dimensione 2 se esso ha area finita non nulla, la curva di Koch sembra definire un insieme con dimensione maggiore di 1 ma minore di 2, il che sembra contraddire la nozione stessa di dimensione.

lem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42 (1936) 230–265.

[24]Helge von Koch, "Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes", *Acta Mathematica*, 30 (1906) 145–176.

La curva di Koch ha la proprietà di essere autosimile: limitandosi per semplicità al processo di trasformazione di un singolo lato del triangolo, esso si può infatti vedere come il risultato dell'applicazione di quattro trasformazioni che prendono il lato, lo contraggono tutte di un fattore $\frac{1}{3}$, e lo muovono in quattro direzioni diverse. La curva che si ottiene si può considerare come il punto fisso della combinazione delle quattro trasformazioni: è dunque chiaro che la sequenza dei rapporti di similarità $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ codifica una proprietà fondamentale della curva.

Nel 1918 Felix Haussdorff[25] (1868–1942) introdusse una nuova nozione di dimensione, che nel caso delle curve autosimili con sequenza dei rapporti di similarità $(r_1, \ldots, r_n)$ (dove $r_i < 1$ per ogni i) è l'unico numero d tale che $r_1^d + \cdots + r_n^d = 1$. Nel caso di un segmento, che si può considerare come avente sequenza $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, esso è la soluzione dell'equazione

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^d = 1,$$

cioè l'atteso 1. Ma nel caso della curva di Koch esso è invece la soluzione dell'equazione

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^d = 1,$$

cioè l'inatteso $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$.

In modo analogo al paradosso pitagorico dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, che venne risolto introducendo un nuovo tipo di numero (gli irrazionali), il paradosso di Koch venne dunque risolto introducendo un nuovo tipo di curve, dette *frattali*: esse sono quelle la cui dimensione di Haussdorff è appunto maggiore di 1, e ce ne sono a bizzeffe (ad esempio, per ogni reale s tale che $1 < s < 2$ c'è una curva frattale con dimensione di Haussdorff uguale ad s).

Berry (1908)

Nel 1908 Bertrand Russell[26] pubblicò un paradosso che gli era stato riferito dal bibliotecario G.G. Berry: se definiamo un numero come "il più piccolo

[25] Felix Haussdorff, "Dimension und äußeres Maß", *Mathematischen Annalen*, 79 (1918) 157–179.

[26] Bertrand Russell, "Mathematical logic as based on the theory of types", *American Journal of Mathematics*, 30 (1908) 222–262.

intero non definibile in meno di trenta sillabe", lo abbiamo appunto appena definito in meno di trenta sillabe.

Russell rimosse il paradosso con facilità (o faciloneria). La definizione precedente coinvolge infatti la totalità delle definizioni, che contiene in particolare quella appena data: in termini tecnici, essa è dunque *impredicativa*. Se si decide di fare a meno di definizioni impredicative, o di considerarle insensate, il paradosso svanisce: sfortunatamente, con esso svanisce però anche una buona parte della matematica (ad esempio, non sarebbe più possibile definire l'estremo superiore come "il più piccolo dei maggioranti", perchè esso è appunto uno di essi).

Con altrettanta faciloneria i logici si accontentarono di notare che anche il paradosso di Berry, come già quello di Richard, non 'pertineva ad mathematica': essi se ne disinteressarono dunque fino al 1974, quando Gregory Chaitin[27] recuperò le idee del paradosso in termini puramente formali. Egli partì dalla seguente riformulazione del paradosso di Berry: se definiamo un numero come "il più piccolo intero non definibile in meno di n caratteri", abbiamo dato una definizione che usa $c + |n|$ caratteri, dove c è una costante ed $|n|$ è la lunghezza della rappresentazione decimale di n; la definizione è paradossale per ogni n tale che $c + |n| \leq n$, cioè quasi sempre.

Chaitin proseguì definendo come *complessità* di un numero la posizione del primo programma che ne stampa la rappresentazione decimale (in un ordinamento di tutti i programmi scritti in un linguaggio di programmazione universale,[28] intendendo sia il linguaggio che l'ordine arbitrari ma fissati), e come *casuale* un numero la cui complessità non sia minore del numero stesso.

Il ragionamento del paradosso di Berry diventa ora la dimostrazione del teorema che *ci sono infiniti numeri casuali*. Dato un numero n, si considerino infatti i numeri stampati dai primi $n+1$ programmi (cioè quelli nelle posizioni da 0 ad n comprese). Se x è diverso da tali numeri, la sua complessità deve essere almeno $n + 1$. Se inoltre x è il minimo di tale numeri, esso è $\leq n + 1$, perchè abbiamo considerato $n + 1$ programmi, e nel caso peggiore essi stampano esattamente tutti i numeri da 0 fino ad n. Allora tale x è $\leq n + 1$, ma la sua complessità è $\geq n + 1$: dunque x è casuale. Poichè c'è

[27]Gregory Chaitin, "Information-theoretic limitations of formal systems", *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21 (1974) 403–424.

[28]L'ordine dei programmi può essere stabilito in modo da riflettere una qualunque misura di complessità, ad esempio la lunghezza: la terminologia astrae dal caso specifico, e definisce la complessità in base all'ordine.

un numero casuale di complessità almeno $n + 1$, ed n è qualunque, ci sono infiniti numeri casuali.

Skolem (1923)

Nel 1923 Thoralf Skolem[29] (1887–1963) provò che ogni teoria matematica usuale consistente ammette un modello numerabile, cioè con tanti elementi quanti sono i numeri interi: il risultato segue sostanzialmente da un lato dal fatto che ciò di cui una teoria può parlare deve essere espresso nel suo linguaggio, e dall'altro dal fatto che nei linguaggi usuali (basati cioè su un numero finito di simboli) si può soltanto costruire una quantità numerabile di nomi.

Il risultato vale naturalmente, in particolare, anche per la teoria degli insiemi: se essa è consistente, esiste dunque un suo modello numerabile. Ma questa conclusione, come notò esplicitamente lo stesso Skolem, sembra a prima vista paradossale: la teoria dimostra infatti l'esistenza di insiemi non numerabili, che dovrebbero far parte del modello numerabile.

La spiegazione formale del paradosso non è difficile: dire che un insieme è non numerabile significa dire che non esiste un modo per metterlo in corrispondenza biunivoca coi numeri interi; e dire che un insieme è non numerabile in un modello significa dire che non esiste *nel modello* un modo per metterlo in corrispondenza biunivoca coi numeri interi (del modello). È dunque possibile che un insieme sia allo stesso tempo numerabile perchè contenuto in un modello numerabile (che esista cioè un modo per metterlo in corrispondenza biunivoca coi numeri interi), ma non numerabile nel modello stesso (che cioè nessuna tale corrispondenza stia nel modello). In altre parole, il paradosso scompare per lasciare il posto ad una sottigliezza.

Le conseguenze filosofiche della sottigliezza sono però inattese. Anzitutto, la teoria degli insiemi di Cantor, che a prima vista sembrava introdurre nella matematica una metafisica cornucopia di infiniti, in realtà non richiede altro che una sola nozione di infinito (numerabile). Inoltre, i risultati di esistenza di infiniti sempre maggiori sono in realtà risultati di inesistenza di corrispondenze biunivoche: essi mostrano cioè non la ricchezza dell'universo matematico, ma l'intrinseca limitatezza della nostra possibile conoscenza di

[29]Thoralf Skolem, "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre", *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922*, 1923, pp. 217–232.

esso.

Banach e Tarski (1924)

Uno dei princìpi più discussi della formalizzazione della teoria degli insiemi è il cosiddetto *assioma della scelta*: data una collezione arbitraria di insiemi, esso permette di scegliere in un sol colpo un elemento da ciascun insieme non vuoto della collezione.

L'assioma è risultato essere equivalente ad un numero enorme di altre proposizioni, tra le quali: il teorema del buon ordinamento di Zermelo in teoria degli insiemi (ogni insieme può essere ordinato in modo tale che ogni sottoinsieme dell'ordinamento ha un primo elemento), il lemma di Zorn in algebra (ogni insieme parzialmente ordinato in cui ogni catena è limitata, ha un elemento massimale), e il teorema di Tychonoff in topologia (ogni prodotto di spazi compatti è compatto).

Sfortunatamente, dall'assioma di scelta non derivano soltanto risultati positivi: ad esempio, esso permette di provare l'esistenza di insiemi (di numeri reali) non misurabili.[30] Basta identificare due reali tra 0 ed 1 se la loro differenza è razionale, e poi scegliere (mediante l'assioma) un reale in ciascuna classe di equivalenza, ottenendo un insieme A; l'insieme A_r che si ottiene aggiungendo il razionale r a tutti gli elementi di A ha la stessa misura di A (per l'invarianza rispetto a traslazioni); se A avesse misura nulla anche $\mathbb{R}$ l'avrebbe, perchè esso è l'unione di tutti gli A_r (per l'additività); se A avesse misura non nulla allora $[0, 2]$ avrebbe misura infinita, perchè esso contiene l'unione degli A_r con r tra 0 ed 1 (per l'additività).

Come se non bastasse, alle conseguenze spiacevoli dal punto di vista matematico se ne aggiungono altre che sono semplicemente paradossali, la più famosa delle quali è stata trovata nel 1924 da Stephan Banach e Alfred Tarski[31] (1902–1983): date due sfere qualunque, è possibile tagliarne una in cinque pezzi che possono essere ricomposti in modo tale da ottenere una sfera di volume uguale all'altra. In particolare, si può tagliare una sfera grande

[30] Si ricordi che una misura è una funzione monotona, invariante per traslazioni e numerabilmente additiva (tale cioè che la misura di una somma numerabile di insiemi disgiunti è la somma delle misure), che assegna misura $|b - a|$ all'intervallo $[a, b]$.

[31] Stephan Banach e Alfred Tarski, "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes", *Fundamenta Mathematicae*, 6 (1924) 244–277.

come un pisello in cinque pezzi, che ricomposti danno una sfera grande come il sole.

Naturalmente, il taglio della sfera non si può fare nel modo solito: il procedimento di Banach e Tarski usa appunto l'assioma della scelta per isolare punti in ordine sparso, senza che questi debbano (o possano) essere connessi fra loro: in termini più precisi, i pezzi non sono misurabili. Ma anche così specificato il risultato rimane poco intuitivo.

Per ovviare alle conseguenze paradossali dell'assioma di scelta, in anni recenti una parte degli insiemisti ha concentrato l'attenzione su assiomi ad esso alternativi. Fra questi il più interessante sembra essere l'*assioma di determinatezza*,[32] dal quale discende una ricca e coerente immagine del continuo: in particolare ogni insieme è misurabile, e dunque il paradosso di Banach e Tarski diventa impossibile.

Conclusione

Secondo Thomas Kuhn,[33] la storia della scienza è simile a quella politica: a periodi di 'scienza istituzionale (o normale)', in cui si lavora all'interno di paradigmi stabiliti ed accettati, seguono periodi di 'rivoluzione scientifica' provocati da crisi dei paradigmi stessi, da cui emergono nuovi paradigmi e nuovi periodi di stabilità temporanea.

Gli esempi visti mostrano che, benchè diversa dalla scienza in altri rispetti, la matematica non ne differisce comunque in questo: anzi, le crisi dei paradigmi e le scintille per le rivoluzioni matematiche sono appunto stimolate e innescate dai paradossi, che al loro apparire provocano tragedie personali (da Ippaso a Frege) e collettive, ma che col passare del tempo (anche se, a volte, soltanto dopo millenni) finiscono per essere integrati nel corpo della matematica, occupandone non di rado un posto d'onore.

[32] Dato un insieme di funzioni su numeri interi, due giocatori alternano numeri che sono i successivi valori di una funzione (rispettivamente, per gli argomenti pari e dispari): se alla fine la funzione sta nell'insieme dato vince il primo giocatore, altrimenti vince il secondo. L'assioma di determinatezza asserisce che, per ciascun insieme di funzioni, uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

[33] Thomas Kuhn, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, 1962.