LA CORSA NEL TEMPO DELLA TARTARUGA

Piergiorgio Odifreddi

Dicembre 1995

L'epoca moderna è stata caratterizzata dall'idea di *progresso infinito*, che interpretava la storia dell'umanità come un'inesorabile avanzata verso una meta finale di perfezione. Le molteplici tragedie del secolo XX, dai totalitarismi ai genocidi, dagli armamenti nucleari ai disastri ambientali, hanno ormai posto definitivamente fine all'illusione.

La visione positiva dell'epoca moderna, sintetizzata dalle parole "e così sia" che una volta concludevano in maniera assertiva e ottimista le formulazioni rituali dei nostri desideri, ha ceduto il passo alla visione negativa dell'epoca postmoderna, sintetizzata dalle parole "e così via" che concludono in maniera sconsolata e pessimista le narrazioni delle ripetitive tragedie a cui abbiamo accennato.

Benchè non necessariamente caratteristica della nuova visione, l'idea di *regresso infinito* è certo in sintonia più con essa che con la precedente. Il momento è dunque propizio per narrarne le vicissitudini storiche, pur limitatamente ai campi della filosofia, della matematica e delle arti. Ci sembra che una tale narrazione possa utilmente articolarsi come una revisione del percorso dell'eleatismo nella storia del pensiero.

Zenone

Zenone di Elea (V secolo a.C.) è passato alla storia per motivi paradossali: come autore cioè di una quarantina di paradossi, in massima parte oggi perduti, e da lui intesi come argomenti a sostegno delle tesi del suo maestro (e amante) Parmenide, che negava la possibilità del divenire in generale, e del moto in particolare.

A causa del suo successo dialettico Zenone veniva chiamato 'lingua biforcuta', e molti sognarono certamente di tagliargliela: egli stesso realizzò il loro sogno quando, per incitare i concittadini alla rivolta contro il tiranno, se la mozzò da solo coi denti e gliela sputò in faccia.[1]

Il paradosso di Zenone più famoso, a causa di una riuscita immagine letteraria, è quello che coinvolge Achille piè veloce, e la tartaruga zampa lenta. Se Achille concede alla tartaruga un qualunque vantaggio non riuscirà mai a raggiungerla, perchè deve prima percorrere la distanza che le ha concesso di vantaggio, ma nel frattempo essa ha percorso un nuovo tratto, che Achille dovrà colmare, e così via.

L'essenza del ragionamento precedente è presente in forma più pura in altri due paradossi simmetrici di Zenone: *è impossibile sia partire che arrivare*. Infatti, per arrivare in un luogo è necessario arrivare prima a metà della distanza, poi a metà del percorso rimanente, e così via; e per partire è necessario percorrere qualche distanza, ma prima si deve averne percorso metà, e prima ancora metà della sua metà, e così via.

Zenone mostrò infine che *è impossibile essere in viaggio*, coniando anche in questo caso una efficace immagine letteraria: una freccia non può volare. Infatti in ogni istante essa è ferma, mentre il moto è una successione di movimenti.

Quest'ultimo paradosso è complementare ai tre precedenti: mentre quelli si basano infatti sulla *continuità* (che interviene nella possibilità di indefinita suddivisione), questo si basa sulla *discretezza* (quando si considerano istanti o punti). In tal modo gli argomenti dell'impossibilità del moto coprivano entrambe le possibilità, ed evitavano assunzioni metafisiche sulla natura dello spazio e del tempo.

Hui Shi e Chuang Tzu

Molti degli argomenti di Zenone sono stati riscoperti, quasi simultaneamente, dal sofista cinese Hui Shi (IV secolo a.C.). Essi sono riportati nell'ultimo capitolo del classico taoista *Chuang Tzu* (IV secolo a.C.), che li critica come "parole che non raggiungono il bersaglio", un "voler correre più veloci della propria ombra".

[1] Vedi Diogene Laerzio, *Vite e opinioni dei filosofi illustri*, IX, 25–29.

Due in particolare sono sorprendenti, per le loro analogie con gli argomenti della tartaruga e della freccia:

> Se ogni giorno si dimezza un bastone lungo un piede, ne rimarrà sempre qualcosa anche dopo diecimila generazioni.
>
> Vi sono momenti in cui la freccia che vola non è in movimento.

Nonostante la sua critica agli argomenti di Hui Shi, *Chuang Tzu* ne presenta autonomamente di simili.[2] Ad esempio, nel capitolo II: se esiste l'uno allora esso partecipa dell'essere, e quindi esiste il due (appunto, l'uno e l'essere); e allora esiste il tre (cioè l'uno, il due e la loro unità); e così via in progressione aritmetica. La morale tipicamente taoista che viene dedotta è che, poichè qualunque pensiero ne genera infiniti altri, *è meglio non pensare*. In modo meno drastico, a partire da Frege l'argomento viene usato in matematica per generare infiniti insiemi a partire da uno (in genere il nulla, nella forma dell'insieme vuoto).[3]

Sempre nel capitolo II, l'argomento precedente è presentato in una interessante variante: qualcuno sostiene una tesi (ad esempio che il mondo abbia un inizio); un altro nega la tesi; un altro ancora nega la negazione della tesi; e così via. Il regresso infinito viene questa volta evitato, sempre in maniera tipicamente taoista, sostenendo che *non esiste differenza fra affermazioni e negazioni*. La logica occidentale è meno drastica, sostenendo che non esiste differenza fra affermazioni e doppie negazioni (nel caso classico), o anche solo fra negazioni e triple negazioni (nel caso intuizionista).

[2] Che i due non fossero poi così diversi è dimostrato dal seguente dialogo fra sordi, dal capitolo XVII. Essi passeggiavano un giorno sull'argine di un fiume. Disse Chuang: "Guardate i pesciolini, come nuotano a loro agio! È questa la gioia dei pesci." Domandò Hui: "Voi non siete un pesce. Come sapete qual'è la gioia dei pesci?" Ribattè Chuang: "Voi non siete me. Come sapete che non so qual'è la gioia dei pesci?" Rispose Hui: "Io non sono voi, e non so quello che sapete e non sapete. Ma voi non siete un pesce, e quindi non sapete qual'è la gioia di un pesce." Disse Chuang: "Poichè mi avete chiesto come sapevo qual'è la gioia dei pesci, sapevate che lo sapevo. E lo so perchè sono sull'argine del fiume."

[3] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884. In realtà Frege pensava che l'argomento fosse sufficiente per dimostrare l'esistenza non solo di *infiniti insiemi*, ma anche di un *insieme infinito*. Oggi però i matematici accettano la prima parte ma non la seconda, che deve essere postulata indipendentemente.

Platone

Nel *Parmenide* di Platone (428–347 a.C.), dialogo in cui compare Zenone stesso, si trovano almeno due argomenti ispirati ai suoi inconfondibili paradossi, se non direttamente dovuti a lui.

Il primo espone una difficoltà della teoria di Parmenide: *l'uno è molti*. Se infatti l'uno esiste allora esso partecipa dell'essere, e quindi ha due parti (appunto, l'uno e l'essere); ma ciascuna di queste due parti è una e partecipa dell'essere, e quindi ha a sua volta due parti; e così via in progressione geometrica (si ricordi la versione aritmetica di Chuang Tzu).

Il secondo argomento (132 a), detto del *terzo uomo*, espone invece una difficoltà della teoria delle idee di Platone: gli uomini hanno caratteristiche comuni, che definiscono l'idea di Uomo; ma allora anche gli uomini e l'Uomo hanno caratteristiche comuni, che definiscono l'idea di un terzo uomo, diverso da entrambi; e così via.

Era dunque ormai diventato evidente che Zenone aveva inaugurato una modalità di pensiero capace di mettere in difficoltà qualunque teoria, comprese quelle (di Parmenide) che egli era invece partito per difendere.

Eubulide

Eubulide di Mileto, della scuola megarica (IV secolo a.C.), formulò il famoso paradosso del mentitore, una delle cui versioni è:

questa frase è falsa.

A prima vista questo è un argomento di tipo diverso da quelli di Zenone, ma anch'esso genera un regresso infinito quando si incominci a sostituire a "questa frase" ciò che essa significa, cioè la frase stessa, ottenendo dapprima

"questa frase è falsa" è falsa,

poi

" "questa frase è falsa" è falsa" è falsa,

e così via. Ci si riduce quindi ad una frase infinita e senza soggetto, il che dimostra che non si stava parlando di niente:

" " "... è falsa" è falsa" è falsa" è falsa.

Nel 1969 John Bart ha utilizzato un artificio simile per un suo racconto,[4] che inizia nel modo seguente:

> C'era una volta una storia, che iniziava con: C'era una volta una storia, che iniziava con: C'era una volta una storia, che iniziava con: ...

Pirrone

Gli argomenti delle scuole eleatica e megarica, se presi seriamente, possono generare un profondo scetticismo sul linguaggio e sul mondo stesso. Non a caso Zenone ed Eubulide sono considerati i precursori filosofici di Pirrone di Elide (secolo IV a.C.), fondatore appunto della scuola scettica: egli sosteneva che, poichè tutte le opinioni sono incerte e tutte le cose uguali, si deve smettere di parlare (*afasia*), di giudicare (*epoché*), di essere coinvolti (*atarassia*), e di agire (*apatia*).

Il legame fra Zenone e Pirrone fu reso esplicito dagli scettici Agrippa (secolo I d.C.) e Sesto Empirico (secolo II d.C.), che usarono argomenti eleatici a favore della sospensione di ogni giudizio. Ad esempio, il primo sostenne che *niente si può provare*: ogni prova si deve infatti basare su qualcosa di non provato, che si deve provare a sua volta, e così via. Analogamente, il secondo sostenne che *niente si può definire*: ogni definizione si deve infatti basare su qualcosa di non definito, che si deve definire a sua volta, e così via.

Aristotele

Questi argomenti erano comunque già noti ad Aristotele (384–322): nella *Metafisica* (IV, 4, 1006) egli dichiara che non si può dimostrare o definire tutto, perchè in tal caso si procederebbe all'infinito e non ci sarebbe nessuna dimostrazione o definizione, ed è dunque segno d'ignoranza non sapere quando fermarsi. La via d'uscita dallo scetticismo proposta da Aristotele, ed adottata dai matematici a partire da Euclide, è il metodo assiomatico: le dimostrazioni si basano in ultima analisi su asserzioni non dimostrate (gli assiomi), e le definizioni su termini non definiti (le nozioni primitive).

Aristotele aveva anzi fatto un uso sistematico degli argomenti precedenti (II, 2, 994, e XII, 7, 1072), applicandoli non solo alla logica ma alla scienze

[4] John Bart, "Frame tale", in *Lost in the funhouse*, Grosset and Dunlap, 1969.

naturali, e precisamente sia alle cause (di ogni genere: materiali, formali, finali) di un evento, che agli effetti. In particolare, egli aveva così introdotto due argomenti che, sotto il nome di *causa prima* e *primo motore*, saranno poi ripresi dai medioevali come prove dell'esistenza di Dio.[5]

Per quanto riguarda invece i paradossi di Zenone stesso sulla continuità, Aristotele sembrava pensare che la soluzione risiedesse in una distinzione fra *infinito attuale* e *potenziale*. Nella *Fisica* (239b, 9) egli sostenne infatti che l'infinita divisibilità potenziale di un segmento non è contraddittoria: è solo una infinità attuale di punti che non si può percorrere fisicamente. La soluzione di limitarsi all'infinito potenziale fu adottata dalla matematica greca e rimase attuale (!) sino all'ottocento, quando fu possibile superarla grazie alla teoria degli insiemi.

Archimede

Gli equilibrismi più arditi per mantenersi nell'ambito dell'infinito potenziale furono compiuti da Archimede (287–212), il più grande matematico dell'antichità. Egli sviluppò e condusse alla perfezione una versione geometrica degli argomenti di Zenone, il cosiddetto *metodo di esaustione* introdotto da Eudosso (408–355).

L'applicazione più spettacolare da parte di Archimede fu la dimostrazione che l'area di un cerchio di raggio r è πr^2, che procede nel modo seguente: si mostra che i poligoni regolari inscritti nel cerchio hanno tutti area minore di πr^2, e che per ogni numero $a < \pi r^2$ ne esiste uno con area compresa fra a e πr^2; analogamente, si mostra che i poligoni regolari circoscritti al cerchio hanno tutti area maggiore di πr^2, e che per ogni numero $a > \pi r^2$ ne esiste uno con area compresa fra a e πr^2.

Il passo cruciale della dimostrazione è tipicamente zenoniano: dato un qualunque poligono regolare inscritto nel cerchio, il poligono regolare di un numero doppio di lati differisce dal cerchio per al massimo la metà di quanto vi differiva il precedente. Il metodo di esaustione sposta però l'accento dal fatto negativo che la differenza non sarà comunque mai nulla, a quello positivo che essa diventa arbitrariamente piccola.

[5] L'argomento della causa prima si trova già anche nel capitolo XXII del *Chuang Tzu*.

Avicenna

Nella *Metafisica* (II, 1, 2) il filosofo arabo Avicenna (980–1036) introdusse la cosiddetta *prova cosmologica*: definendo *contingente* un essere che ha bisogno di qualche altro essere per esistere, si può fermare un regresso infinito a partire dall'esistenza di un essere contingente solo introducendo un essere *necessario*, che esiste senza aver bisogno di altri esseri.

Avicenna dedusse però da questo argomento, in maniera tipicamente araba, che *tutti gli esseri sono necessari*: anche quelli che a prima vista sembrano contingenti derivano infatti la loro esistenza da un essere necessario, ed esistono quindi necessariamente.

La prova cosmologica fu annessa dagli scolastici, che ovviamente partivano dall'ipotesi che gli esseri esistenti al mondo fossero tutti contingenti, e ne deducevano quindi l'esistenza di un essere necessario distinto da essi. Essa divenne poi uno degli argomenti principali di razionalisti ed empiricisti per l'esistenza di Dio, fino a che non fu smascherata da Immanuel Kant (*Critica della ragion pura*, Dialettica, III, 5) come una variante della prova ontologica, e da George Boole (*Le leggi del pensiero*, XIII) come un argomento logicamente scorretto.

Tommaso d'Aquino

Nella *Summa teologica* (questione 2, articolo 3) Tommaso d'Aquino (1225–1274) introdusse l'uso sistematico degli argomenti zenoniani nella scolastica, riprendendo argomenti ben noti di Aristotele e Avicenna.

La sua prima dimostrazione riguarda un *primo motore*: tutto ciò che si muove è mosso da qualcosa, e per evitare il regresso infinito si deve ammettere che ci sia qualcosa che muove senza essere mosso. L'argomento riecheggia nel primo verso del *Paradiso* di Dante: "la gloria di colui che tutto move" (c'era da aspettarselo che non avremmo avuto pace dai motori neppure in cielo).

La seconda dimostrazione riguarda una *causa prima*: tutto ciò che è causato richiede l'esistenza di una causa, e dunque ci deve essere qualcosa di non causato.

La terza dimostrazione riguarda un *ente necessario*: tutto ciò che esiste ed è contingente deve essere stato causato da qualcosa di già esistente, e dunque deve esistere qualcosa di non contingente.

La quarta dimostrazione riguarda un *ente perfetto*: tutto ciò che è imperfetto deve esserlo perchè si può concepire qualcosa di migliore, e dunque ci deve essere qualcosa di perfetto.

Come si vede, in Tommaso non sono gli argomenti ad essere originali, ma l'uso che egli ne fa: prendendoli anzitutto, all'opposto degli scettici, come segni positivi invece che negativi; e considerandoli poi tutti come dimostrazioni di esistenza di un unico ente, che egli fa coincidere con Dio.[6]

Si noti come fra i vari attributi di Dio considerati da Tommaso non compaia l'infinito: anzi, gli argomenti per assurdo basati sul regresso infinito tendono appunto ad evitarlo fermando il regresso.

Gregorio da Rimini

Il problema della relazione fra Dio e l'infinito era ormai comunque venuto a galla, in particolare nella seguente forma: come si riconcilia l'onnipotenza di Dio con l'impossibilità dell'infinito attuale in natura sostenuta da Aristotele? Non poteva ad esempio Egli creare una pietra infinita?

Tommaso sosteneva di no: un essere onnipotente può fare tutto ciò che è possibile fare, ma ovviamente neppure lui può fare l'impossibile, che altrimenti non sarebbe più tale.

Gregorio da Rimini (1300–1358) ritenne invece che gli argomenti di Zenone potessero andare in soccorso nientemeno che di Dio stesso. Egli dimostrò che se Dio avesse voluto, avrebbe potuto creare una pietra infinita nel giro di una sola ora: bastava che incominciasse con una pietra di un chilo, che vi aggiungesse un chilo dopo mezz'ora, un altro chilo dopo un quarto d'ora, e così via.

Giovanni Buridano (morto nel 1358) non fu convinto: secondo lui l'argomento mostrava solo che Dio poteva creare pietre di grandezze illimitate in meno di un'ora, ma non che potesse completare l'opera.

Descartes

L'eredità filosofica di Renè Descartes (1596–1650) è il tentativo di descrivere l'universo in maniera puramente meccanicista, eccezion fatta per l'esistenza di Dio e dell'anima. In particolare, nel trattato *L'uomo*, abbandonato nel

[6]Anche volendo considerare le dimostrazioni corrette, ci sarebbero pur sempre *due* problemi di unicità dei vari enti: singolarmente (ad esempio, di un'unico primo motore), e globalmente (ad esempio, del primo motore e della causa prima).

1633 in seguito alla condanna di Galileo da parte dell'inquisizione e pubblicato postumo, egli affrontò il problema della vita: non riuscendo a capire come si potesse giustificare meccanicamente la riproduzione di organismi da organismi simili ad essi, fu però costretto ad invocare un miracolo per ciascuna di tali riproduzioni.

Il problema in cui si era imbattuto Descartes riguardava la complessità: affinchè una macchina potesse riprodurne un'altra, sembrava infatti che essa ne dovesse contenere una copia, e che non potesse quindi riprodurre altro che macchine meno complicate di se stessa. Le quali, a loro volta, dovrebbero poter riprodurre soltanto macchine meno complicate di se stesse, innescando così un processo degenerativo contrario all'evidente stabilità delle specie organiche.

Oggi è possibile evitare di scomodare il creatore notando che la riproduzione può avvenire invece seguendo una descrizione, e che questa può essere meno complicata dell'oggetto da costruire: ad esempio, la descrizione "il numero costituito da 1 seguito da un milione di 0" è sostanzialmente meno complessa (in questo caso, più corta) del numero descritto, che occupa un libro di un migliaio di pagine.

Fermat

A Pierre de Fermat (1601–1665), uno dei grandi matematici del secolo XVII, si deve un gran numero di risultati nella teoria dei numeri. Fermat non si degnò mai di pubblicarne le dimostrazioni, ma in più occasioni enunciò il metodo generale che gli aveva permesso di trovarle.

Esso è oggi noto come *discesa infinita*, e funziona così: per dimostrare che non esistono numeri interi con una certa proprietà (ad esempio, due cubi che diano come somma un cubo), si suppone per assurdo che essi esistano, e si mostra come trovarne altri più piccoli e con la stessa proprietà. Ai nuovi numeri così trovati si potrà allora riapplicare il procedimento, trovandone altri ancora più piccoli, e così via, generando quindi una successione discendente infinita di numeri interi, che non può ovviamente esistere (perchè a partire dal numero n si può al massimo discendere n volte, ed arrivati a 0 ci si deve fermare).

Gregorio da San Vincenzo

Già Aristotele aveva notato, nella *Fisica* (III, 6, 206b, 3–33), che una somma infinita può essere finita (più tecnicamente, che una serie può essere convergente) anche quando tutti gli addendi sono non nulli. Ed Archimede aveva dovuto in effetti calcolare le somme di alcune serie, per ottenere i suoi risultati su aree e volumi.

Ma fu Gregorio di San Vincenzo (1584–1667) ad introdurre per primo, nell'*Opus geometricum* del 1647, il concetto di convergenza di una serie infinita come limite delle somme parziali. Egli applicò immediatamente la nuova nozione al paradosso di Zenone, sostenendo che l'uguaglianza

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$$

ne costituiva la soluzione: la somma finita della serie infinita mostra infatti che Achille raggiungerà la tartaruga in un tempo e luogo determinati.

Sterne

Dopo essere stato appannaggio esclusivo di filosofia e matematica per due millenni, era ormai venuto il tempo per le idee zenoniane di attrarre l'interesse della letteratura.

Il battesimo dell'arte avvenne nel romanzo di Laurence Sterne *Tristam Shandy*, del 1760. La storia è che il protagonista del romanzo aveva intrapreso la scrittura della sua autobiografia, ma dovette abbandonarla dopo che in due anni era riuscito soltanto a descrivere i primi due giorni della sua vita: se ogni giorno di vita richiedeva un anno per essere raccontato, l'impresa di una autobiografia completa era ovviamente impossibile.

In realtà non c'è niente di paradossale in questa versione, ma solo una triste constatazione della mortalità della vita umana. Paradossale sarebbe invece una vita infinita, perchè essa permetterebbe non soltanto di scrivere la propria completa autobiografia ai lenti ritmi di Tristam Shandy, ma anche di passare gran parte del tempo a far altro (per rendere interessante la biografia stessa).

Veramente paradossale sarebbe postulare, invece di un futuro, un passato infinito appena concluso: in base alla stessa corrispondenza tra infiniti anni e infiniti giorni, anche in questo caso ci sarebbe tutto il tempo di scrivere la propria autobiografia completa. Se non fosse che la descrizione dell'ultimo giorno richiede comunque un anno, e dovrebbe dunque essere intrapresa prima di viverlo!

Kant

Gli argomenti eleatici, che avevano costituito il fondamento della *summa teologica* di Tommaso d'Aquino, mostrarono la loro perdurante versatilità filosofica insinuandosi anche della *Critica della ragion pura* di Immanuel Kant (1724-1804), che cita esplicitamente e rispettosamente Zenone quale "sottile dialettico" (B 345).

In particolare, la seconda antinomia mostra che il mondo non può essere nè costituito di elementi atomici, nè infinitamente divisibile: la materia ha infatti estensione spaziale, ed è quindi soggetta all'infinita divisibilità dello spazio stesso; ma l'infinita divisibilità porta ad un regresso all'infinito al termine del quale non rimane più nulla, e in cui la materia si dissolve.

La conclusione che Kant ricava dalle sue antinomie è che *la nozione di mondo è illegittima*: da un lato l'intelletto ne percepisce infatti la finitezza come una limitazione inadeguata, ma dall'altro non sa concepirne l'infinitezza in maniera comprensibile.

Lotze

La terza antinomia kantiana riguardava determinismo e libertà, ed Hermann Lotze (1817–1881) contribuì alla discussione mostrando che *i rapporti causali sono impossibili*: due oggetti non possono infatti agire direttamente uno sull'altro, ed ogni azione deve essere mediata da un terzo oggetto; ma allora anche l'azione sul o del terzo oggetto deve essere mediata, e così via. Lo stesso ragionamento vale, a maggior ragione, quando si consideri l'interazione non fra due oggetti, ma fra corpo ed anima.

Affinchè sia possibile spiegare l'azione fra oggetti è dunque necessario, secondo Lotze, postulare l'esistenza di una potenza mediatrice distinta dalla natura, e supplementare il meccanicismo con lo spiritualismo.

Schopenhauer

Nel *Mondo come volontà e rappresentazione* (II, 19) Arthur Schopenhauer (1788–1861) aveva già avanzato lo stesso argomento, per altro mutuato dalla filosofia indiana, per mostrare che *non si può conoscere se stessi*: la conoscenza richiede infatti un soggetto conoscente distinto dall'oggetto conosciuto, questo soggetto richiede a sua volta un ulteriore soggetto conoscente, e così via.

Nella scienza la distinzione fra soggetto e oggetto di conoscenza viene riformulata in termini di osservatore e osservabile. Mentre però nella fisica classica l'osservatore veniva in ultima analisi eliminato a favore di una descrizione puramente in termini di osservabili, esso ha assunto un ruolo centrale e non eliminabile nella meccanica quantistica. L'osservazione di Schopenhauer ricompare quindi nella forma: *non si può dare una descrizione quantistica dell'intero universo*, perchè essa richiederebbe un osservatore esterno ad esso.

Lo spettro di Schopenhauer e della illusorietà del mondo fenomenico aleggia anche nel tentativo di soluzione idealista, proposto da Hugh Everett nel 1957,[7] detto dei *molti mondi*: l'osservazione non è un processo oggettivo di registrazione dell'univoco accadere di fatti fisici, ma un processo soggettivo di percezione di una sola delle infinite e simultaneamente esistenti diramazioni della realtà.

Cantor

La moderna teoria degli insiemi, introdotta da Georg Cantor (1845–1918), ha segnato il passaggio dall'infinito potenziale a quello attuale in matematica. Non può dunque stupire che essa abbia avuto profonde ripercussioni nella discussione degli argomenti di Zenone.

Cantor ha anzitutto mostrato, nel 1878,[8] che due intervalli qualunque sono in corrispondenza biunivoca fra loro: niente impedisce quindi ad Achille nè di raggiungere nè di superare la tartaruga, perchè essi percorrono sempre lo stesso numero di punti, ciascuno alla propria velocità.

Il paradosso di Zenone si può anche riformulare come il procedimento che, dato un segmento con gli estremi inclusi, lo divide in due parti uguali e ne cancella la prima, poi divide in due parti uguali quella rimasta e ne cancella la prima, e così via: alla fine rimarrà soltanto un punto, cioè l'estremo finale. Cantor aveva in precedenza considerato, nel 1872,[9] la modifica secondo cui

[7]Hugh Everett, " 'Relative state' formulation of quantum mechanics", *Reviews of Modern Physics*, 29 (1957) 454–462.

[8]Georg Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84 (1878) 242–258.

[9]Georg Cantor, "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der

si divide il segmento in tre parti uguali e se ne cancella quella centrale, poi si divide in tre parti uguali ciascuno dei due segmenti rimasti e se ne cancella quella centrale, e così via: alla fine rimane un insieme infinito di punti sparsi, detto *polvere di Cantor*.

Non c'è problema ad estendere il procedimento da segmenti su una linea a quadrati nel piano, o cubi nello spazio, ottenendo nel primo caso la *gaschetta di Sierpinski*, e nel secondo la *spugna di Menger*. Tutti questi oggetti sono esempi dei cosiddetti *frattali* che hanno tanto attirato l'attenzione recente, e di cui il paradosso di Zenone si può dunque considerare la prima anticipazione.

Carroll

Rifacendosi ad Achille e la tartaruga in maniera esplicita Lewis Carroll (1832–1898) effettuò, nel 1895,[10] una metamorfosi dell'argomento di Zenone per sostenere che *non sono possibili i sillogismi*: dire che da certe premesse segue una conclusione significa dire che c'è una regola che permette di passare dalle prime alle seconde; ma per poter applicare la regola si deve avere una metaregola che dica che, dalle premesse e dalla regola che lega premesse e conclusioni si possono ricavare le conclusioni, e così via.

La novità dell'argomento di Carroll era che esso mostrava in maniera efficace la distinzione fra implicazione linguistica e deduzione metalinguistica, oggi formalizzata nel cosiddetto *teorema di deduzione*, che enuncia appunto la loro equivalenza. Più in generale, l'argomento mostrava per la prima volta esplicitamente la distinzione fra linguaggio e metalinguaggio, che è oggi una conquista assodata della logica moderna.

In modo simile e per scopi analoghi, benchè ormai in ritardo sui tempi, Ludwig Wittgenstein (1879–1954) mostrerà nelle *Ricerche filosofiche* che *non si imparano le regole mediante metaregole*: altrimenti per imparare le metaregole sarebbero necessarie metametaregole, e così via.

Bradley

La filosofia di Francis Herbert Bradley (1846–1924) è un ritorno esplicito agli eleatici: egli credeva nell'assoluto e nell'uno, come unica possibile riconciliazione delle ubique contraddizioni della molteplicità nell'apparenza.

---

trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, 5 (1872) 123–132.

[10]Lewis Carroll, "What the tortoise said to Achilles", *Mind*, 4 (1895) 278–280.

Più precisamente, in *Apparenza e realtà* (1897) egli effettuò una variazione della variazione di Carroll per mostrare che *non sono possibili proprietà e relazioni* di nessun genere: ad esempio, dire che un oggetto ha una proprietà unaria significa dire che esiste una relazione binaria fra l'oggetto e la proprietà, e questo significa dire che esiste una relazione ternaria fra l'oggetto, la proprietà e la relazione, e così via.

Royce

Le idee di Bradley furono discusse dettagliatamente nel 1899 da Josiah Royce (1855–1916) in *The world and the individual*, in cui è presentata anche una efficace (e oggi ben nota) immagine del regresso infinito in esse presente:

> Immaginiamo che una porzione del suolo d'Inghilterra sia stata livellata perfettamente, e che in essa un cartografo tracci una mappa d'Inghilterra. L'opera è perfetta; non c'è particolare del suolo d'Inghilterra, per minimo che sia, che non sia registrato nella mappa; tutto ha lì la sua corrispondenza. La mappa, in tal caso, deve contenere una mappa della mappa, che deve contenere una mappa della mappa della mappa, e così all'infinito.

In un testo ne *L'artefice*, del 1960, attribuito apocrifamente all'inesistente Suárez Miranda (*Viaggi di uomini prudenti*, libro quarto, cap. XLV, Lérida, 1658), Jorge Luis Borges riformulò l'argomento letterariamente:

> ... In quell'Impero, l'Arte della Cartografia raggiunse tale Perfezione che la mappa di una sola Provincia occupava tutta una Città, e la mappa dell'impero, tutta una Provincia. Col tempo, codeste Mappe Smisurate non soddisfecero e i Collegi dei Cartografi eressero una Mappa dell'Impero, che uguagliava in grandezza l'Impero e coincideva puntualmente con esso. Meno Dedite allo Studio della Cartografia, le Generazioni Successive compresero che quella vasta Mappa era Inutile e non senza Empietà la abbandonarono alle Inclemenze del Sole e degl'Inverni. Nei deserti dell'Ovest rimangono lacere Rovine della Mappa, abitate da Animali e Mendichi; in tutto il Paese non è altra reliquia delle Discipline Geografiche.

Più implicitamente, la problematica sollevata dal regresso infinito della mappa di Royce si trova implicata in tutte le opere che contengono una parte che dovrebbe coincidere con l'opera stessa: l'*Iliade* di Omero, in cui Elena ricama una veste di porpora che rappresenta la storia del poema; il *Ramayana* di Valmiki, al termine del quale i figli di Rama cercano rifugio in una selva, dove un asceta insegna loro a leggere su un libro che è, appunto, il *Ramayana*; il *Mahabarata* di Vyasa, che inizia con un narratore che incontra un amico e gli racconta il *Mahabarata*, una storia che narra del poeta Vyasa che detta al dio Ganesh il *Mahabarata*, una storia che narra di un re che incontra il poeta Vyasa e si fa raccontare il *Mahabarata*; il *Sogno della camera rossa*, in cui il protagonista vede agli inizi in sogno gli avvenimenti del romanzo; l'*Amleto* di Shakespeare, in cui si rappresenta una tragedia che è pressapoco la stessa dell'*Amleto*; ...

Oggi non è forse meno interessante considerare l'argomento matematicamente, alla luce del teorema del punto fisso di Banach,[11] secondo cui una contrazione su uno spazio metrico completo ha un unico punto fisso: nel caso della mappa, questo significa che ci deve essere un punto del territorio che coincide con la sua immagine sulla mappa.

Bergson

Henri Bergson (1859–1941) fu particolarmente interessato alla continuità di spazio e tempo, di cui criticò la formalizzazione matematica basata sul concetto di punto. In particolare egli riteneva che l'infinita divisibilità fosse una proprietà dello spazio ma non del tempo, sulla base dell'osservazione che si può arbitrariamente dividere un oggetto, ma non un atto.

Nel *Saggio sui dati immediati della coscienza*, del 1910, Bergson credette di poter ricondurre il paradosso di Achille e la tartaruga alla confusione fra movimento e spazio percorso: i passi reali di Achille sono indivisibili, ed un numero finito di essi gli permetterà di superare la tartaruga, ma Zenone arbitrariamente sostituisce ad essi passi virtuali, sincronizzati su quelli della tartaruga in modo tale da impedirgli di raggiungerla.

Bergson assegnava agli argomenti di Zenone un ruolo storico importante, per aver esposto l'inconsistenza della nozione matematica di moto e, più in

[11] Stephan Banach, "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales", *Fundamenta Mathematicae*, 3 (1922) 7-33.

generale, di cambiamento. Contrariamente agli eleatici, egli riteneva però che i paradossi mostrassero che ad essa si doveva contrapporre una nozione intuitiva di cambiamento, da considerare inoltre come una caratteristica fondamentale della realtà.

Dunne

In *An experiment with time* (XXII) J.W. Dunne spinge Zenone al limite, per mostrare questa volta che *ci sono infiniti tempi*: infatti, poichè poi il fluire di qualcosa è relativo al tempo, il fluire del tempo richiede un secondo tempo in cui esso possa fluire, e quindi un terzo rispetto a cui il secondo possa fluire, e così via.

Le infinite dimensioni del tempo sono sperimentate dal soggetto nei vari livelli della sua coscienza: la percezione avviene nel primo tempo, la coscienza della percezione nel secondo, la coscienza della coscienza della percezione nel terzo, e così via. Le visioni dei vari tempi vengono coordinate nei sogni, attraverso cui si può quindi sperimentare il 'tempo vero', cioè l'irraggiungibile termine ultimo della serie infinita dei tempi.

La scienza moderna, nella sua apparente voracità di idee fantafilosofiche, ha considerato seriamente la possibilità sollevata da Dunne. Ad esempio, Ilya Prigogine (premio Nobel per la Chimica nel 1977) ha sviluppato una teoria in cui ci sono effettivamente due tempi: un primo che è analogo alle tre dimensioni spaziali, ed un secondo rispetto a cui sia le coordinate spaziali che quella relativa al primo tempo possono variare (in termini tecnici, un primo tempo che è una variabile hamiltoniana, ed un secondo che funge da parametro rispetto a cui derivare).

Kafka

L'intera opera di Franz Kafka (1883–1924) è, secondo Carlos Mastronardi,[12] un rifacimento letterario dei paradossi di Zenone: il pathos dei suoi romanzi nasce precisamente dal numero infinito di ostacoli che fermano i loro identici eroi. E anche l'incompiutezza delle sue opere (la mancanza di capitoli intermedi) ne è una conseguenza: non è infatti necessario enumerare tutti i

[12] Vedi Jorge Luis Borges, *Conversazioni*, 1985 (Bompiani, 1986), p. 93.

punti di un segmento o tutte le possibili vicissitudini, per suggerire l'infinito regresso.

Come esempio del procedimento vale la pena di riportare interamente, per la sua brevità, lo zenoniano racconto *Il messaggio dell'imperatore*, del 1917 (poi inserito nel contemporaneo e altrettanto zenoniano *La muraglia cinese*):

> L'imperatore – così si racconta – ha inviato a te, a un singolo, un misero suddito, minima ombra sperduta nella più lontana delle lontananze dal sole imperiale, proprio a te l'imperatore ha inviato un messaggio dal suo letto di morte. Ha fatto inginocchiare il messaggero al letto, sussurrandogli il messaggio all'orecchio; e gli premeva tanto che se l'è fatto ripetere all'orecchio. Con un cenno del capo ha confermato l'esattezza di quel che gli veniva detto. E dinanzi a tutti coloro che assistevano alla sua morte (tutte le pareti che lo impediscono vengono abbattute e sugli scaloni che si levano alti ed ampi son disposti in cerchio i grandi del regno), dinanzi a tutti loro ha congedato il messaggero. Questi s'è messo subito in moto; è un uomo robusto, instancabile; manovrando or con l'uno or con l'altro braccio si fa strada nella folla; se lo si ostacola, accenna al petto su cui è segnato il sole, e procede così più facilmente di chiunque altro. Ma la folla è così enorme; e le sue dimore non hanno fine. Se avesse via libera, all'aperto, come volerebbe!, e presto ascolteresti i magnifici colpi della sua mano alla tua porta. Ma invece si stanca inutilmente!, ancora cerca di farsi strada nelle stanze del palazzo più interno; non riuscirà mai a superarle; e anche se gli riuscisse non servirebbe a nulla; dovrebbe aprirsi un varco scendendo tutte le scale; e anche se gli riuscisse, non servirebbe a nulla; c'è ancora da attraversare tutti i cortili; dietro a loro il secondo palazzo, e così via per millenni; e anche se riuscisse a precipitarsi fuori dell'ultima porta – ma questo mai e poi mai potrà avvenire – c'è tutta la città imperiale di fronte a lui, il centro del mondo, ripieno di tutti i suoi rifiuti. Nessuno riesce a passare di lì, e tanto meno con il messaggio di un morto.
>
> Ma tu stai alla finestra e ne sogni, quando giunge la sera.

Borges

Jorge Luis Borges (1899–1986) ha tratto dai paradossi di Zenone da un lato le basi del suo pensiero su infinito, tempo e realtà (ubiqui nei suoi scritti), e dall'altro lo spunto per la costruzione delle sue inquietanti situazioni al limite.

Egli li ritiene la prova definitiva che smaschera il carattere allucinatorio del mondo: senza di essi il nostro sogno sarebbe così preciso e coerente che finiremmo per crederci, ma essi vi introducono smagliature di assurdità che finiscono per rivelarne l'irrealtà. Borges li usa poi ripetutamente e per analoghi scopi nelle sue costruzioni letterarie, di cui offriamo due brevi scelte.

La prima è tratta da *La morte e la bussola*, del 1944. Un detective riesce a prevedere l'ultimo delitto di una serie, ma recatosi sul luogo per prevenirlo scopre di esservi stato attirato per esservi ammazzato. Ecco l'ultima conversazione fra la vittima e l'assassino:

> "Nel suo labirinto" disse alla fine, "ci sono tre linee di troppo. Io so di un labirinto greco che è una linea unica, retta. In questa linea si sono perduti tanti filosofi che ben vi si potrà perdere un mero detective. Scharlach, quando in un altro avatar lei mi darà la caccia, finga (o commetta) un delitto in A; quindi un secondo delitto in B, a otto chilometri da A; quindi un terzo in C, a quattro chilometri da A e da B, a metà strada tra i due. E mi aspetti poi in D, a due chilometri da A e da C, di nuovo a metà strada. Mi uccida in D come ora sta per uccidermi in Triste-le-Roy."
>
> "Per quest'altra volta" rispose Scharlach, "le prometto questo labirinto invisibile, incessante, d'una sola linea retta".
>
> Indietreggiò di alcuni passi. Poi, accuratissimamente, fece fuoco.

Il secondo brano è da *La scrittura del Dio*, del 1949:

> Un giorno o una notte – tra i miei giorni e le mie notti, che differenza c'è? – sognai che sul pavimento del carcere c'era un granello di sabbia. Mi riaddormentai indifferente; sognai che mi destavo e che i granelli di sabbia erano due. Mi riaddormentai; sognai che i granelli di sabbia erano tre. Si andarono così moltiplicando fino a colmare il carcere e io morivo sotto quell'emisfero

> di sabbia. Compresi che stavo sognando; con un grande sforzo mi destai. Fu inutile; l'innumerevole sabbia mi soffocava. Qualcuno mi disse: "Non ti sei destato alla veglia ma a un sogno precedente. Questo sogno è dentro un altro, e così all'infinito, che è il numero dei granelli di sabbia. La strada che dovrai percorrere all'indietro è interminabile e morrai prima di esserti veramente destato".

Thomson

Nel 1954 James Thomson ha proposto una ulteriore variazione del paradosso di Zenone,[13] nella forma di un puzzle: supponiamo di accendere una lampada, poi di spegnerla dopo mezz'ora, di riaccenderla dopo un quarto d'ora, e così via. Allo scadere dell'ora, la lampada sarà accesa o spenta?

Il problema è naturalmente da intendere come un esperimento di pensiero, indipendentemente dalla possibile realizzazione fisica della lampada. La difficoltà è comunque altrove, nel fatto che i dati del problema non determinano la sua soluzione: la fine dell'ora viene infatti dopo tutti gli istanti che l'hanno preceduta, ed è soltanto su questi che abbiamo informazioni.

La stessa conclusione varrebbe anche se il puzzle fosse riformulato nel seguente modo: supponiamo di accendere una lampada, e che essa sia ancora accesa dopo mezz'ora, dopo tre quarti d'ora, e così via. Allo scadere dell'ora, la lampada sarà accesa o spenta?

Se questa è tutta l'informazione che abbiamo, niente assicura che la risposta ovvia, che cioè la lampada sarà ancora accesa, sia corretta: ed infatti non lo è, nel caso che la lampada venga spenta un'ora esatta dopo averla accesa.

Escher

Dopo che il paradosso di Zenone aveva assunto le forme più svariate e impreviste, esso è stato infine raffigurato a colori da un artista che ha avuto una sensibilità speciale per motivi matematici: Maurits Cornelis Escher (1898–1972).

Il procedimento di successive bisezioni da lui usato nelle incisioni *Sempre più piccolo* (1956), *Divisione regolare del piano* VI (1957) e *Quadrato limite*

[13]James Thomson, "Tasks and supertasks", *Analysis*, 15 (1954) ??.

(1964), non può ormai che suonarci familiare: si parte da un triangolo isoscele rettangolo, sulla sua ipotenusa si costruiscono altri due triangoli isosceli rettangoli adiacenti, e così via. Nei vari triangoli vengono poi inseriti pesci o lucertole che rimpiccioliscono senza fine, suggerendo visivamente l'incessante e incompletabile processo al limite.

Conclusione

La storia del regresso infinito, partita da un'ingenua storiella su un eroe greco e una tartaruga, ci ha fatto indietreggiare passo dopo passo (il lettore giudicherà se ai ritmi dell'uno o dell'altra) verso un'analisi critica dei fondamenti stessi del pensiero: spazio, tempo, causalità, definibilità, dimostrabilità, deducibilità ... sono stati tutti rosi da un insistente tarlo, che alla fine non ha risparmiato nessuna proprietà e relazione, ed ha coinvolto addirittura le nozioni stesse di mondo e di autocoscienza.

"Ritoccare il nostro concetto dell'universo, per quel pezzettino di tenebra greca?" si domandava Borges, annunciando la sua affermativa scelta. "Rinunciare a quel pezzettino di luce greca, per il nostro concetto dell'universo?" potremmo ribattere noi logici ...

Bibliografia

La storia dei paradossi di Zenone è ovviamente appena stata accennata. Per ulteriori informazioni, rimandiamo a:

- Wesley Salmon (curatore), *Zeno's paradoxes*, Bobbs-Merrill, 1970.
- Adolf Grünbaum, *Modern science and Zeno's paradoxes*, Wesleyan University Press, 1967.