PARADOSSI DELL'INDUZIONE

Piergiorgio Odifreddi

Dicembre 1995

Matematica e scienza sono imprese intellettuali complementari ma contrapposte, che si distinguono per la direzione del loro sguardo: la prima procede in avanti, dalle ipotesi (gli assiomi) alle conclusioni (i teoremi che ne derivano), mentre la seconda risale all'indietro, dalle conclusioni (i dati sperimentali) alle premesse (le leggi fisiche da cui essi possono essere derivati).

Per gettare sabbia negli occhi (della mente), il principio basilare della matematica viene chiamato nello stesso modo di quello della scienza: in entrambi i casi si usa infatti il termine *induzione*. In realtà, i due principi sono completamente diversi, e possono venire enunciati nel modo seguente:

- L'*induzione matematica* stabilisce che se una proprietà vale per il numero 0, e se quando vale per il numero n continua a valere per il numero $n+1$, allora essa vale per tutti i numeri.

- L'*induzione scientifica* stabilisce che se una proprietà è confermata da tutti i fatti conosciuti e non è falsificata da nessun fatto conosciuto, allora essa è vera in generale.

Ciò che accomuna però i due principi dal punto di vista della logica è che entrambi godono (come si dice in gergo) di proprietà paradossali, ed è appunto a causa di questa loro godereccia similitudine che vengono qui accomunati.

L'induzione matematica

Il primo paradosso dell'induzione matematica è dovuto a Zenone di Elea (V secolo a.C.), nella forma del *sorite* (che in greco significa 'mucchio'): se un granello di miglio non fa rumore cadendo, allora non può nemmeno far rumore un mucchio; o, equivalentemente, poichè un mucchio fa rumore cadendo, allora dovrebbe far rumore anche un granello.

In realtà, l'ipotesi esplicita (che un solo granello di miglio non faccia rumore) è vera, ma quella implicita (che se un numero n di granelli non fa rumore, allora anche un numero $n + 1$ continua a non far rumore) è falsa: esiste infatti un livello di soglia sotto il quale il rumore non è percepibile, e sopra il quale lo diventa.

La cosa è ancora più evidente in altri casi. Ad esempio, come il detto popolare insegna, esiste una 'goccia che fa traboccare il vaso': essa impedisce di dedurre dal fatto che una goccia sola non lo fa traboccare, che esso non traboccherà mai. O, come insegna invece la storia, esiste una 'massa critica': essa impedisce di dedurre dal fatto che un atomo di uranio o plutonio non esplode, che nessuna concentrazione di atomi esploderà.

Il ragionamento di Zenone si può però applicare anche in altri casi, in cui non sembra esserci una via d'uscita così agevole. Basta ad esempio sfrondare la versione del mucchio dalla distrazione del rumore, e chiedersi quand'è che i granelli diventano un mucchio: un solo granello non è un mucchio, e se n non sono un mucchio allora neppure $n + 1$ dovrebbero esserlo.

Il problema sembra qui essere il fatto che la nozione di 'mucchio' è vaga, e una possibile soluzione è che l'induzione matematica non si possa applicare a nozioni vaghe. Effettivamente, versioni del paradosso si possono costruire per parecchie nozioni vaghe o relative: ad esempio, 'alto', 'basso' (un millimetro in più o in meno non fanno diventare alti o bassi), 'lungo', 'corto', 'ricco', 'povero', ...

Una versione particolarmente accattivante è stata proposta nel 1969 da James Cargile:[1] poichè un girino diventa una rana, se il tempo è discreto allora deve esserci un istante in cui esso è ancora girino, e tale che all'istante successivo esso è già rana. In particolare, poichè un film provoca una discretizzazione del tempo, filmando la crescita del girino deve esserci un fotogramma in cui esso appare ancora girino, ma tale che nel fotogramma successivo esso appare già rana.

Il paradosso sembra comunque essere rilevante, e non una pura curiosità, in svariate situazioni della vita reale in cui sono coinvolte proprietà che non

[1]James Cargile, "The sorite paradox", *British Journal for the Philosophy of Science*, 20 (1969) 193–202.

sono presenti a livello delle costituenti di un sistema, ma sembrano emergere in modo sconosciuto dalla complessità del sistema stesso: ad esempio, la seconda legge della termodinamica (irreversibilità del tempo), il teorema di Bell (realtà locale), il teorema di Arrow (transitività dell'ordine delle preferenze), il teorema della fermata (determinismo), la coscienza, la vita, ...

Non si deve pensare comunque che le nozioni matematiche siano immuni dal paradosso dell'induzione. Ad esempio, 0 è un numero piccolo, e se n è piccolo allora anche $n + 1$ è piccolo; allora, per induzione, ogni numero è piccolo.[2]

L'induzione scientifica

Secondo Aristotele (*Metafisica*, XIII, 4) è stato Socrate a scoprire l'induzione, come metodo di passaggio dal particolare al generale. Sempre secondo Aristotele (*Topici*, I, 12), l'induzione è uno dei due metodi della dialettica insieme alla deduzione, che è invece un passaggio dal generale al particolare.

Stoici ed epicurei iniziarono una disputa su quale dei due metodi fosse quello corretto di ragionamento. In particolare, gli stoici obiettavano che l'*induzione incompleta*, che generalizza a partire da un insieme parziale dei possibili dati, non potrà mai dare conclusioni certe, mentre l'*induzione completa*, che generalizza a partire dall'intero insieme dei dati possibili, non è altro che una forma (in genere impraticabile) di deduzione.

La disputa tra stoici ed epicurei fu ripresa dopo secoli da razionalisti ed empiricisti, in un periodo in cui i successi dell'induzione nella scienza ne rendevano ormai necessaria una giustificazione teoretica. A questo proposito, David Hume suggerì che i rapporti causali e le generalizzazioni induttive non sono relazioni fra eventi fisici ma costruzioni mentali, e Immanuel Kant precisò che i principi di causalità e di induzione sono degli *a priori* che determinano la nostra visione del mondo.

Nel frattempo Leibniz aveva scoperto, nel 1703, il primo paradosso dell'induzione:[3] come *ci sono infinite curve che passano per un numero finito di punti*, così ogni insieme finito di dati è compatibile con un numero infinito di

[2] Nel caso della matematica queste proprietà si possono sfruttare positivamente, costruendo ad esempio modelli non standard dell'aritmetica in cui esistono infinitesimi ϵ, tali che $n \cdot \epsilon$ sia effettivamente piccolo per ogni n; o infiniti Ω, tali che $n < \Omega$ per ogni n.

[3] Gottfried Liebniz, lettera a James Bernoulli del 3 dicembre 1703.

generalizzazioni induttive. Questa osservazione, quasi banale, è stata riproposta negli anni '50, con grande fracasso, da due filosofi.

Nelson Goodman ha anzitutto illustrato il paradosso di Leibniz con una efficace immagine,[4] notando che il fatto che tutti gli smeraldi scoperti finora sono verdi permette di indurre due generalizzazioni contrapposte: la prima, più ovvia, che tutti gli smeraldi sono verdi; la seconda, più balzana, che tutti gli smeraldi scoperti finora sono verdi, e quelli che saranno scoperti d'ora in poi sono blu. Naturalmente, il problema è capire come mai la prima sembra più sensata della seconda: la soluzione non sta semplicemente nel fatto che essa non dipende dal tempo, perchè basta sostituire la seconda affermazione con quella che tutti gli smeraldi sono verdi, eccetto uno che è blu.

Ludwig Wittgenstein ha invece applicato il paradosso di Leibniz al problema dell'apprendimento,[5] notando che *non è possibile imparare una regola generale sulla base di un numero finito di esempi*. La conclusione che egli trasse dal fatto evidente che comunque si impara, fu che seguire una regola costituisce allora una prassi che si apprende sulla base del comportamento collettivo della società: in particolare, un comportamento non può essere corretto individualmente, ed un linguaggio privato è impossibile.

Questi sviluppi seguivano un dibattito su natura e scopi dell'induzione, tenutosi negli anni '30. In particolare, i positivisti logici del circolo di Vienna avevano dapprima proposto una *teoria della verificazione*, basata su un'idea di Wittgenstein: il significato di un'affermazione sta nelle condizioni per verificarla, e quindi solo affermazioni verificabili sono sensate. Come conseguenza, nessuna generalizzazione che richieda un numero potenzialmente infinito di dati per la propria verifica è sensata! Neppure questa conclusione sembrava però essere troppo sensata, perchè per risolvere il problema dell'induzione faceva piazza pulita di tutte le leggi scientifiche che essa doveva giustificare.

Karl Popper aveva ribattuto con una *teoria della falsificazione*:[6] mentre (come aveva notato Leibniz) un numero finito di eventi in accordo con una generalizzazione infinita non potrà mai verificarla, basta un solo evento in disaccordo per falsificarla. Non si tratta quindi di giustificare una generalizzazione corretta sulla base dei dati disponibili, ma soltanto di scegliere fra le

[4]Nelson Goodman, *Fact, fiction and forecast*, 1954.
[5]Ludwig Wittgenstein, *Ricerche filosofiche*, 1953.
[6]Karl Popper, *La logica della scoperta scientifica*, 1934.

ipotesi che essi non contraddicono: in pratica, la scelta cadrà poi sulle ipotesi più semplici perchè esse sono le più facili da falsificare.

Rudolf Carnap aveva infine accettato in parte le critiche di Popper, indebolendo la teoria della verificabilità in una *teoria della conferma*:[7] dalle osservazioni si ottiene non una verifica, ma una conferma delle ipotesi scientifiche. Anche qui non si tratta quindi di giustificare una generalizzazione corretta sulla base dei dati disponibili, ma soltanto di scegliere fra le ipotesi che essi confermano. È proprio nella teoria della conferma che sorgono però i paradossi più noti dell'induzione, quand'essa venga accoppiata ai metodi usuali di deduzione.

Un paradosso devastante è stato trovato nel 1974 da Hesse:[8] *qualunque proposizione ne conferma qualunque altra*! Ad esempio, il fatto che oggi piova a Londra è una conferma dell'affermazione che oggi piove a Londra e che c'è sole a Tahiti; ma se qualcosa conferma che oggi piove a Londra e c'è sole a Tahiti, dovrebbe confermare in particolare che c'è sole a Tahiti; dunque *il fatto che piova a Londra conferma che c'è sole a Tahiti.*

Un paradosso meno generale, ma non meno fastidioso, è stato formulato nel 1945 da Carl Hempel.[9] Consideriamo l'affermazione che tutti i corvi sono neri: essa equivale all'affermazione che tutto ciò che non è nero non è un corvo, e quindi dovrebbe essere confermata da ogni conferma di quest'ultima; ma questa è confermata ogni volta che troviamo qualcosa che non sia nero e non sia un corvo; quindi *ogni cigno bianco conferma che ogni corvo è nero.*[10]

Conclusione

Lo sviluppo di strumenti formali per lo studio del ragionamento e del mondo passa per una stretta obbligata: la concentrazione su aspetti drasticamente semplificati, che ne permettano un trattamento matematico. Anche nell'ipotesi migliore, che questi aspetti siano cioè significativi, essi forniscono comunque

[7] Rudolf Carnap, "Testability and meaning", *Philosohical Science*, 3 (1936) 419–471, e 4 (1937) 1–40.

[8] M. Hesse, *The structure of scientific inference*, 1974.

[9] Carl Hempel, "Studies in the logic of confirmation", *Mind*, 54 (1945) .

[10] In termini tecnici, la differenza fra i due paradossi precedenti sta nel fatto che il primo coinvolge soltanto la logica proposizionale (in particolare, soltanto congiunzione e implicazione), mentre il secondo coinvolge la logica del prim'ordine (in particolare, il quantificatore universale e l'equivalenza logica).

soltanto una rappresentazione parziale dei fenomeni che vengono descritti.

Evidenti agli inizi della teorizzazione, queste limitazioni tendono però col tempo ad essere dimenticate nell'inerzia dello sviluppo: i paradossi richiamano allora salutarmente all'ordine, ricordando al pensiero formale che esso è immune da contraddizioni soltanto all'interno di ben delimitati confini.

Questi confini vengono in particolare superati nelle applicazioni dell'induzione: esse mostrano a sufficienza che, quando il linguaggio scientifico si illude di poter curare le imprecisioni e ambiguità di quello naturale, rischia invece di risultarne a sua volta contaminato.