METAMORFOSI DI UN TEOREMA

Piergiorgio Odifreddi

Settembre 1994

Nel 1931 la logica matematica raggiunse massa critica grazie ad un lavoro di Kurt Gödel,[1] in cui egli dimostrò un esplosivo teorema che avrebbe scatenato una reazione a catena di commenti e fraintendimenti.

Proprio perchè a volte qualcuno si lascia prendere la mano (il famoso fisico John Wheeler chiese una volta se fosse vero che il teorema spiegasse l'esistenza dei buchi neri), può essere interessante ripercorrere alcune delle metamorfosi del malcapitato risultato.

1 Sogni

Incominciamo con una metafora ed una anticipazione, come riscaldamento.

1.1 Letteratura

Una caratteristica costante della teoria letteraria, da Aristotele (*Poetica*, 8) a Umberto Eco (*L'opera aperta*), è la realizzazione dell'*incompletezza dell'opera*. Se opportunamente formulata, essa fornisce una metafora del teorema di Gödel che ne coglie l'essenza, nel modo seguente.

Un'opera letteraria ci fa conoscere una realtà possibile, i cui aspetti espliciti si possono leggere direttamente nel testo, ed i cui aspetti impliciti si possono dedurre mediante analisi ed esegesi di esso. *Nessun testo descrive una realtà sufficientemente complessa in modo completo*: ad esempio,

[1]'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I', *Monatshefte für Mathematick und Physik*, 38 (1931) 173–198, tradotto ne *Il teorema di Gödel*, a cura di S.G. Shanker, Muzzio, 1991, pp. 23–62.

i *Promessi sposi* non determinano quanti bambini abbiano avuto Renzo e Lucia, e si limitano a dire che "ne vennero poi col tempo non so quant'altri, dell'uno e dell'altro sesso".

Se l'opera descrive una realtà possibile ma fantastica, non ha senso chiedersi se i fatti da essa lasciati indecisi siano veri o falsi; nell'esempio: quanti bambini abbiano avuto Renzo e Lucia. Se invece l'opera descrive una realtà di fatto, allora si può dire che gli aspetti non determinati dall'opera sono comunque determinati dalla realtà, e ci saranno quindi fatti veri che essa non descrive (nè esplicitamente, nè implicitamente).

Opere letterarie, aspetti espliciti ed impliciti, e critica letteraria corrispondono a sistemi matematici, assiomi e teoremi, e dimostrazioni. Il teorema di Gödel dice che nessun sistema matematico può descrivere una realtà matematica possibile e sufficientemente complessa in modo completo. Se si crede che i sistemi matematici descrivano una realtà di fatto (una posizione detta *platonismo*), allora ci saranno formule vere che non sono teoremi.

1.2 Filosofia

Uno dei punti fondamentali della filosofia di Kant, nella *Critica della ragion pura* (1781) e nei *Prolegomeni ad ogni metafisica futura* (1783), è l'*incompletezza della ragione*. Sia l'enunciato che lo scheletro dell'argomentazione a suo favore costituiscono una vera e propria anticipazione del teorema di Gödel e della sua dimostrazione, nel modo seguente.

Il sistema di Kant può oggi essere descritto brevemente dicendo che le categorie (cioè i 'concetti dell'intelletto') sono semplicemente le nozioni primitive di una formulazione del calcolo dei predicati modale. Le idee trascendentali (cioè i 'concetti della ragione') si ottengono mediante un passaggio al limite di alcune di tali categorie (dette di relazione). In particolare, il limite dell'implicazione (che corrisponde alla categoria della causalità) si raggiunge spingendosi all'indietro il più possibile nella ricerca delle premesse (o cause), e viene detto *causa prima*; il limite della disgiunzione (che corrisponde alla categoria della comunanza) consiste nel considerare una disgiunzione omnicomprensiva che abbracci ogni cosa, e viene detto *dio*; infine, al limite del predicato atomico (che corrisponde alla categoria della sostanza) si arriva con la nozione di individualità, che viene detta *anima*.

I razionalisti, quali Cartesio e Leibniz, che pure avevano fatto della ragione la base per le loro filosofie, non solo avevano accettato di considerare tali idee trascendentali come sensate, ma avevano addirittura tentato di provarne l'esistenza mediante argomenti razionali. Kant non si limitò a notare il fallimento di questi tentativi di 'dimostrazione', ma andò ben oltre. Egli mostrò, mediante quattro antinomie, che le idee trascendentali sono contraddittorie, e ne dedusse la seguente conclusione: se si richiede completezza dalla ragione, permettendo la considerazione di idee 'al limite', si cade nell'inconsistenza.

La conclusione di Kant si può riformulare dicendo che *se la ragione vuole essere consistente, non può essere completa* (nel senso di poter decidere ogni problema che essa si ponga). Se si sostituisce 'ragione' con 'sistema matematico', si ottiene precisamente una formulazione del teorema di Gödel. E anche la dimostrazione di questo procede, in essenza, come quella di Kant: dato un sistema matematico, si considera un'idea trascendentale ottenuta come limite della non dimostrabilità nel sistema (una formula che dica *di se stessa* di non essere dimostrabile nel sistema), e si mostra che se il sistema è completo (cioè decide ogni formula, dimostrando o essa stessa o la sua negazione) allora si cade nell'inconsistenza.

2 Visioni

Passiamo ora a versioni scientifiche del teorema di Gödel, accennando alle dimostrazioni in modo informale.

2.1 Matematica

Consideriamo un sistema matematico *corretto*, tale cioè che ogni formula in esso dimostrabile è vera, e la formula G che dice di se stessa di non essere dimostrabile nel sistema.

G non può essere dimostrabile, altrimenti il sistema proverebbe una falsità. Non essendo dimostrabile, e dicendo appunto di non esserlo, G è dunque vera. Allora la sua negazione è falsa, e dunque anch'essa non è dimostrabile. Il sistema non è quindi *completo*, tale cioè che se una formula non è dimostrabile in esso, allora lo è la sua negazione.

Un sistema corretto è ovviamente *consistente*, tale cioè che non è possibile dimostrare in esso sia una formula che la sua negazione. L'indimostrabilità di G è provabile anche sotto l'ipotesi che il sistema sia soltanto consistente (non necessariamente corretto), nel modo seguente: se G fosse dimostrabile allora esisterebbe una sua dimostrazione, e questa sarebbe una prova del fatto che G è dimostrabile; in altre parole, se G fosse dimostrabile sarebbe anche dimostrabile 'G è dimostrabile', cioè la negazione di G; e allora il sistema sarebbe inconsistente.[2]

L'argomento precedente mostra che la consistenza del sistema implica l'indimostrabilità di G, e quindi in particolare G stessa: poichè G non è dimostrabile, non può neppure esserlo la consistenza stessa (nè, a maggior ragione, la correttezza). Il fatto che un sistema consistente non possa dimostrare la propria consistenza viene spesso chiamato *secondo teorema di Gödel*, ed è appunto il risultato che ha infiammato gli animi degli epigoni.

Prima di cercare di spegnere le fiamme, dobbiamo ancora notare che gli argomenti informali precedenti giocano in parte sull'ambiguità della nozione di dimostrabilità, che viene a volte usata in un senso intuitivo (per così dire, dall'esterno del sistema), ed altre in un senso più formale (all'interno del sistema). È dunque necessario fare un'ipotesi aggiuntiva, oltre alla correttezza o alla consistenza del sistema considerato: esso deve anche essere sufficientemente ricco[3] (dal punto di vista espressivo), in modo da permettere di ripetere al suo interno quegli argomenti informali (che richiedono, fra l'altro, di scrivere una formula che parli della propria indimostrabilità).

I due teoremi di Gödel si possono quindi formulare più precisamente dicendo che *un sistema matematico consistente e sufficientemente ricco non può dimostrare la propria consistenza, e se esso è anche corretto allora è incompleto.*

2.2 Informatica

Nel 1936 Alan Turing ha trovato una versione informatica del teorema di Gödel[4] che oggi è popolare quanto quella originale, in quanto mostra limitazioni non dei sistemi matematici ma dei computer.

[2]Se il sistema è solo consistente ma non corretto, la negazione di G potrebbe essere dimostrabile. È possibile però dimostrare che il sistema è comunque incompleto, considerando la formula che dice di se stessa di non essere dimostrabile prima (cioè con una dimostrazione più corta) della sua negazione.

[3]Al posto di 'ricco' si usa a volte 'potente': è ben noto che i due aggettivi sono spesso intercambiabili, anche nella vita reale.

[4]'On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem', *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42 (1936) 230–265.

Consideriamo un computer programmabile ed il suo *problema della fermata*, che chiede se il computer si ferma o no quando lavora con un dato programma p ed un dato input i.

Il problema della fermata non può essere *decidibile*, cioè risolubile dal computer stesso mediante un programma P. Altrimenti esisterebbe un altro programma P_1 che lavora come segue, dato il programma p: si usa P per decidere se il programma p si ferma sull'input p o no, e poi si fa fare a P_1 il contrario. Quindi P_1 si ferma su p se e solo se p non si ferma su p, ed in particolare P_1 si ferma su P_1 se e solo se P_1 non si ferma su P_1, contraddizione.

Il teorema di Turing si può quindi formulare dicendo che *un computer programmabile è incompleto*, nel senso che non può decidere tutti i problemi riguardo al proprio funzionamento. Più in particolare, benchè un computer programmabile possa simulare passo per passo qualunque programma su qualunque input (localmente), non può decidere in generale se tali simulazioni porteranno o no ad un risultato (globalmente).

Una conseguenza immediata del teorema di Turing è che *un sistema matematico corretto e sufficientemente ricco è indecidibile*, nel senso che non esiste nessun programma che possa determinare se una formula è dimostrabile oppure no: un tale programma potrebbe infatti decidere in particolare le istanze del problema della fermata.

E questa è una forma del teorema di Gödel, perchè l'indecidibilità è più forte dell'incompletezza. Infatti, un sistema matematico consistente e completo è decidibile: per sapere se una formula è dimostrabile, basta enumerare le dimostrazioni fino a che se ne trovi una o della formula in questione (nel qual caso essa è dimostrabile), o della sua negazione (nel qual caso la formula non è dimostrabile, per la consistenza); ed uno dei due casi deve succedere prima o poi, per la completezza.

Più in generale, i teoremi di Gödel e Turing sono connessi attraverso l'identificazione di sistemi matematici e programmi, basata su un fatto empirico: in questo secolo assiomi e regole dei sistemi matematici usuali sono stati formulati in modo così preciso e dettagliato, che le derivazioni possono ormai essere simulate mediante computer (sia per verificarle, come nei *proof checkers*, che per trovarle, come nei *theorem provers*).

2.3 Teoria dell'informazione

Nel 1974 Gregory Chaitin ha trovato una versione del teorema di Gödel in termini di teoria dell'informazione.[5]

Consideriamo il concetto di *numero casuale*, tale cioè che qualunque programma che lo stampi non possa avere lunghezza minore di quella del numero stesso: in questo caso la rappresentazione del numero è la sua più corta descrizione, e non è possibile comprimerla sostanzialmente (come invece è possibile, ad esempio, per 'il numero costituito da un 1 seguito da un miliardo di 0', descrizione che richiede sostanzialmente meno di un miliardo di lettere).

Si ha ora la seguente forma del teorema di Gödel: *un sistema matematico corretto può provare la casualità soltanto di un numero finito di numeri casuali.*[6] Se così non fosse, esisterebbe un programma p_n che lavora come segue: si generano i teoremi del sistema formale, fino a trovare un numero casuale di lunghezza maggiore di n, e lo si stampa. Poichè i programmi p_n sono tutti uguali eccetto che per la menzione del numero n, essi hanno una lunghezza costituita da una parte fissa (una costante c) più una parte variabile (di lunghezza uguale alla lunghezza di n, cioè $\log n$); ed il numero stampato dal programma p_n è un numero casuale di lunghezza maggiore di n. Ma se n è sufficientemente grande questo è impossibile: n è infatti maggiore di $c + \log n$, e quindi il numero stampato da p_n ha lunghezza maggiore di quella di un programma che lo stampa, cioè non può essere casuale.

Il vantaggio della formulazione di Chaitin nei confronti di quelle di Gödel e Turing è duplice: essa non richiede autoriferimenti nella dimostrazione, ed esibisce enunciati veri ma non dimostrabili di interesse matematico (e non soltanto logico).

---

[5] 'Information-theoretic limitations of formal systems', *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21 (1974) 403–424.

[6] Il fatto fondamentale, che rende non banale il risultato, è che ci sono infiniti numeri casuali. Per provarlo, supponiamo che i numeri siano rappresentati in binario, e che i programmi siano codificati da numeri, anch'essi rappresentati in binario (come effettivamente succede nei computer).

Allora, dato n, ci sono 2^n numeri di lunghezza n, ma al più $2^n - 1$ programmi di lunghezza minore di n (perchè per ogni $i < n$ ci sono al più 2^i programmi di lunghezza i, e quindi al più $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$, cioè $2^n - 1$, programmi di lunghezza minore di n). Dunque almeno un numero di lunghezza n non può essere stampato da un programma di lunghezza minore di n, ed è quindi casuale. E poichè ci sono infiniti n, ci sono anche infiniti numeri casuali.

Un piccolo sforzo permette poi di andare ancora oltre. Chiamiamo *complessità* di un numero la lunghezza del più corto programma che lo stampi, cioè della sua più corta descrizione (così che un numero è casuale se è minore o uguale della sua complessità). Allora *un sistema matematico corretto non può provare che un numero ha complessità troppo maggiore di quella del sistema*;[7] più precisamente, deve esistere un n tale che il sistema non può provare di nessun numero che esso ha complessità maggiore di n. Se infatti il sistema potesse provare, per ogni n, che qualche numero ha complessità maggiore di n, esisterebbe un programma analogo al p_n precedente (che stampa, questa volta, un numero di complessità maggiore di n), con conseguenze simili.

Questa è una versione del secondo teorema di Gödel: invece di provare che il sistema non può accorgersi della propria consistenza, prova che il sistema non può accorgersi di complessità troppo maggiori della propria (codificata attraverso la costante c).

3 Incubi

Proseguiamo con applicazioni parascientifiche del teorema di Gödel, suggestive (s)e non altro.

3.1 Scienze cognitive

L'identificazione di sistemi matematici e programmi spinge a considerarne un'altra: il cervello come hardware, e la mente come software. Il secondo teorema di Gödel può essere in questo caso interpretato metaforicamente come l'affermazione che *la mente umana non può provare la propria consistenza*, con interessanti implicazioni psichiatriche, del tipo: solo i pazzi possono credere di non essere pazzi (cosa, peraltro, confermata dall'esperienza).

Quanto al primo teorema di Gödel, il fatto che dato un qualunque sistema matematico esso esibisca una proposizione vera e non dimostrabile nel sistema è stato ripetutamente interpretato, a partire dal filofoso John Lucas,[8] come una prova del fatto che *la mente umana non è meccanizzabile*: essendo in

[7] Esistono infiniti numeri con complessità maggiore di quella del sistema perchè, come provato nella nota 6, ci sono infiniti numeri casuali.

[8] 'Minds, machines and Gödel', *Philosophy*, 36 (1961) 120-124.

grado di riconoscere la verità di tale proposizione, essa sarebbe infatti meglio di qualunque sistema matematico.

La svista in tale ragionamento è grossolana: la proposizione di Gödel è vera sotto l'ipotesi della consistenza del sistema, che certo la mente umana non è in grado di riconoscere in generale; se poi il sistema fosse inconsistente allora ogni proposizione sarebbe dimostrabile, e quindi una proposizione che asserisce la propria indimostrabilità sarebbe falsa.

Se dunque ci soffermiamo su tali fraintendimenti è soltanto perchè divulgatori anche illustri li risuscitano periodicamente, da François Jacob, premio Nobel per la medicina nel 1965, ne *La logica del vivente* (Einaudi, 1971, p. 368), a Roger Penrose, ne *La mente nuova dell'imperatore* (Rizzoli, 1991, p. 528).

Naturalmente Gödel stesso non è rimasto insensibile alle possibili implicazioni del suo teorema per le scienze cognitive, ma ha mostrato più sofisticazione intellettuale nell'enunciarle.[9]

Anzitutto, egli ha notato che *se la matematica è un prodotto della mente umana, e se l'uomo può decidere tutte le proprietà dei propri prodotti mentali, allora il suo teorema implica effettivamente che la mente non è meccanica*. Naturalmente, le ipotesi aggiuntive sono tutt'altro che evidenti: la prima sarà rifiutata da tutti i platonici che credono in qualche forma di realismo matematico (Gödel compreso); la seconda sarà schernita, per analogia, da tutti coloro che si siano mai stupiti delle proprietà dei propri prodotti fisici.

Inoltre, Gödel ha notato che il teorema di incompletezza non è direttamente applicabile all'intuizione matematica umana, perchè non ci si può aspettare che questa veda necessariamente la verità o la falsità di qualunque proposizione (cioè che essa sia completa nel senso logico). In particolare, il teorema non esclude affatto l'esistenza di *un sistema matematico che provi tutte e sole le intuizioni matematiche*: un tale sistema potrebbe addirittura già essere stato trovato (ad esempio, la teoria degli insiemi), anche se non potremmo mai provare che esso è effettivamente corretto, o anche solo consistente, perchè la dimostrazione di consistenza dovrebbe trascendere il sistema, e quindi il potere dell'intuizione matematica; nè potremmo provare che tale sistema è effettivamente equivalente all'intuizione matematica, perchè di ogni sistema che l'intuizione matematica accetta, essa vede anche la consistenza

[9] Le sue opinioni in materia sono riportate in Hao Wang, *Dalla matematica alla filosofia*, Boringhieri, 1984.

intuitivamente.

3.2 Programmazione

Oltre ai legami sensati fra programmi per computer e teorema di Gödel discussi in precedenza, ne esistono anche di più improbabili.

Anzitutto, il nome di Gödel viene nominato invano in un linguaggio di programmazione omonimo, descritto nel testo *The Gödel programming language* di Patricia Hill e John Lloyd, MIT Press, 1994.

Inoltre, con una concessione alla frivolità dei media, il teorema di Gödel si può riformulare in termini di *virus* di computer,[10] che si possono vedere come programmi v autoriproducentesi, tali cioè che su qualunque input i essi stampino se stessi.

Una prima connessione con il teorema di Gödel sta nel fatto che la sua dimostrazione mostra come trattare l'autoreferenza, e quindi come scrivere tali programmi (la cosa non è troppo complicata, come dimostra la proliferazione dei virus ad opera di quegli imbecilli della tastiera detti *hackers*).

Una seconda connessione sta nel fatto che la seguente è una versione del teorema di Gödel: *il problema della diagnostica dei virus non è decidibile*, nel senso che non esiste un programma D che, quando lavori con un dato programma, si fermi e dia una risposta positiva se questo è un virus, e negativa altrimenti.

Infatti, dato il programma p si può costruire un programma p_1 che si comporti nel modo seguente: sull'input x, p_1 stampa se stesso se p non si ferma sull'input p in meno di x passi, e non si ferma altrimenti. Allora p si ferma sull'input p se e solo se p_1 non stampa se stesso su tutti gli input, cioè non è un virus. Mediante il programma D potremmo allora decidere se p_1 è un virus, e dunque anche se p si ferma sull'input p, contrariamente al fatto che quest'ultima proprietà è indecidibile, come mostrato in precedenza.

3.3 Giurisprudenza

La *completezza del diritto* è un problema discusso a partire dai romani. Non è quindi sorprendente che il filosofo Vittorio Mathieu abbia proposto di in-

[10] William Dowling, 'Computer viruses: diagonalization and fixed points', *Notices of the American Mathematical Society* 37 (1990) 858–861.

terpretare metaforicamente il teorema di Gödel in termini giuridici.[11] I suoi propositi si possono forse riformulare nel modo seguente.

Un'assemblea legislativa e le leggi da essa emanate possono essere assimilate ad un sistema matematico ed ai suoi teoremi. Un analogo del teorema di Gödel si ottiene nella seguente forma, in cui ipotesi e conclusione corrispondono a correttezza e incompletezza: *se un'assemblea deve emanare soltanto leggi consistenti, essa non può avere pieni poteri*. La dimostrazione è banale (a differenza di quella di Gödel): se l'assemblea avesse pieni poteri, potrebbe emanare in particolare la legge (ovviamente contradditoria) che dice "non obbedirmi".

Un analogo del secondo teorema di Gödel è invece il seguente: *se un'assemblea deve emanare soltanto leggi consistenti, essa non può autolegittimarsi*. Se infatti potesse farlo, potrebbe allora usare la sua legittimità come ipotesi di qualunque legge (nella forma: "poichè sono legittima, posso emanare la seguente legge"), ed avrebbe quindi pieni poteri.

La conclusione che si può trarre è politicamente ovvia: le assemblee legislative non possono basare la propria legittimità sulla forza della ragione, e devono quindi appellarsi alla ragione della forza.

Un analogo diverso del teorema di Gödel, con conseguenze politiche (garantiste) di sapore opposto a quelle appena enunciate, si otterrebbe assimilando ad un sistema matematico con le sue dimostrazione ed i suoi teoremi, un sistema giudiziario con i suoi processi e le sue sentenze. L'incompletezza di un sistema corretto significherebbe allora che *non si possono punire tutti i crimini, se si vogliono punire soltanto crimini veramente commessi*. Questo analogo sembra però essere puramente formale, e non sembrano esserci (a prima vista) sue giustificazioni basate sugli argomenti precedenti.

4 Deliri

Come teorema che tratta dell'impossibilità di dimostrare teoremi, il risultato di Gödel è anche una tipica espressione culturale del nostro secolo, che ha visto artisti di ogni genere descrivere le limitazioni di espressione del proprio

[11] 'Sistemi logici e sistemi giuridici', in *Luci e ombre del giusnaturalismo*, Giappichelli, 1989, pp. 57–65.
Si veda anche Alf Ross, 'On self-reference and puzzle in constitutional law', *Mind* 78 (1969) 1–24.

mezzo col mezzo stesso: come esempi, valgano fra tutti *Sei personaggi in cerca di autore* di Luigi Pirandello nella letteratura, *8 e 1/2* di Federico Fellini nel cinema, le tele monocrome di Yves Klein nella pittura, e le composizioni aleatorie di John Cage nella musica.

Concludiamo quindi con l'impatto del teorema di Gödel nell'arte, in particolare nella letteratura (più o meno seria), passando generosamente sotto silenzio opere nelle quali il suo nome appare come puro pretesto (ad esempio, il film *Genio per amore* di Fred Schepisi, del 1995).

4.1 Puzzles

Raymond Smullyan (logico, pianista e mago) ha divulgato i teoremi di Gödel sotto forma di puzzles in una serie di libri (a partire dal *5000 avanti Cristo*), uno dei quali dedicato "a tutti i ragionatori consistenti, che non potranno mai sapere di esserlo".

Invece di considerare sistemi matematici e le proposizioni in essi dimostrabili, Smullyan considera logici e le proposizioni che essi credono. I logici visitano l'Isola dei Cavalieri e degli Scudieri, in cui ogni abitante o è un cavaliere e dice solo il vero, o è uno scudiero e dice solo il falso.

Un logico che crede soltanto proposizioni vere (un analogo della correttezza) incontra un abitante dell'isola, che gli dice: "tu non crederai mai che io sia un cavaliere". L'abitante non può essere uno scudiero, altrimenti direbbe il falso, ed il logico dovrebbe credere una proposizione falsa. Dunque l'abitante è un cavaliere, e dice il vero: la sua affermazione è allora una verità che il logico non crederà mai. D'altra parte, poichè il logico non può credere proposizioni false, non crederà neppure mai che l'abitante sia uno scudiero, e quindi non potrà mai sapere che cosa questi sia (un analogo dell'incompletezza).

Inoltre un logico consistente (che non crede cioè proposizioni fra loro contradditorie) che sappia ragionare sulle proprie credenze non può credere di essere consistente. Supponiamo infatti che egli creda di essere consistente, e che si immagini di incontrare un abitante dell'isola che gli dica: "tu non crederai mai che io sia un cavaliere". Egli può allora ragionare come segue: "Se io credessi che l'abitante è un cavaliere, crederei ciò che egli dice, e quindi che non crederò mai che egli è un cavaliere; d'altra parte, se io credessi che egli è un cavaliere, crederei di crederlo; poichè sono consistente, le due cose non possono essere. Dunque non posso credere che l'abitante è un cavaliere, come egli ha giustamente previsto: ma allora egli dice il vero, e quindi *è* un cavaliere. Ora credo che egli sia un cavaliere, e dunque credo il contrario di ciò che egli ha detto: allora credo che egli sia uno scudiero." Il logico è quindi inconsistente.

4.2 Fantascienza

Esempi di (ab)uso fantascientifico del teorema di Gödel si trovano in vari racconti e romanzi, fra cui i seguenti.[12]

Ne *La macchina della realtà* (1991) William Gibson e Bruce Sterling (profeti del cyberpunk) si chiedono che cosa sarebbe successo se Charles Babbage avesse effettivamente prodotto il suo motore differenziale nella prima metà dell'800. La loro risposta è che l'Inghilterra sarebbe diventata la prima potenza informatica della storia, con Lord Byron primo ministro, e sua figlia Ada Lovelace eminenza scientifica del governo. A tempo debito Lady Ada avrebbe poi scoperto il teorema di Gödel, nel tentativo di sviluppare un sistema completo per vincere al gioco.

In *Software* (1982) Rudy Rucker (cyberpunk pure lui, oltre che matematico, e cantante dei *Dead Pigs*) pone l'immagine olografica di Gödel nel Museo della Robotica, davanti ad una lavagna su cui sono formulate alcune sue osservazioni (non apocrife, vedi nota 9), secondo cui la mente umana è incapace di meccanizzare tutte le sue intuizioni matematiche, ma che ciò nonostante è possibile che esista un dimostratore meccanico che sia equivalente all'intuizione matematica. Secondo Rucker questo significa che l'uomo non può *costruire* robot che siano intelligenti quanto lui, ma che tali robot possono *esistere*, e il romanzo racconta della loro evoluzione per selezione e mutazione, oltre che (ovviamente) del loro conflitto con l'uomo stesso.

In *Golem* XIV (1981) Stanislaw Lem (medico, filosofo e scrittore) aveva già citato il teorema di Gödel per scopi analoghi, in modo più metaforico e letteriamente superiore: così come esistono isole e arcipelaghi di verità matematiche separate dal continente della matematica da una distanza non colmabile con un numero finito di passi, così esistono forme sconosciute di intelligenza separate dal continente della evoluzione da una distanza non colmabile con un numero finito di mutazioni genetiche. Per produrre tali

[12] Altri esempi sono *Alpha aleph* di Frederik Pohl (1972), e *Il fato di Gödel* di Zebrowski (1985).

intelligenze è necessario dunque uscire dal processo evolutivo, e far ricorso al procedimento che usò il barone di Münchausen quando, caduto in una palude andando a cavallo, liberò se stesso e il cavallo tirandosene fuori per i capelli. Nella storia di Lem alcuni computer riescono effettivamente a superare i limiti dell'evoluzione mediante un procedimento di autotrasformazione, e cercano di dare agli esseri umani un'idea della propria intelligenza.

In *Einstein perduto* (1967) Samuel Delany (singolare scrittore di fantascienza, in quanto omosessuale e negro) parafrasa il teorema di Gödel nel modo seguente: esistono infiniti fenomeni percepibili e misurabili che non si possono spiegare per mezzo della sola ragione (ossia, come nell'*Amleto* di Shakespeare, vi sono più cose in cielo e in terra di quante se ne sognano nella filosofia). Delany considera i risultati di Gödel complementari a quelli di Einstein: il secondo ha portato la razionalità umana alle sue estreme conseguenze, il primo ha mostrato come trascenderla. Dal punto di vista futurologico del romanzo, gli effetti visibili dell'opera di Einstein e Gödel si sono storicamente sviluppati secondo una curva rispettivamente convessa e concava: la relatività ha generato un'esplosione di ricerca immediata, per poi livellarsi; l'incompletezza è partita in sordina, per ingigantirsi in seguito. Il momento in cui le due curve si intersecano (che dà il titolo originale all'opera: *The Einstein intersection*) segna un punto di svolta per la storia dell'umanità, che raggiunge i limiti dell'universo conosciuto e passa in un altra realtà.

4.3 Poesia

Il poeta Hans Magnus Enzensberger ha composto *Hommage à Gödel*, dopo aver corrisposto direttamente con Gödel sull'argomento. Il testo della sua improbabile (ma non inconsistente) composizione è il seguente:

> Il teorema di Münchausen (cavallo, palude e capelli)
> è delizioso, ma non dimenticare:
> Münchausen era un bugiardo.
>
> Il teorema di Gödel sembra a prima vista
> piuttosto insignificante, ma ricorda:
> Gödel ha ragione.
>
> "In ogni sistema sufficientemente ricco
> si possono formulare proposizioni,
> che all'interno del sistema stesso

non si possono nè provare nè refutare,
a meno che il sistema
non sia incoerente."

Si può descrivere il linguaggio
nel linguaggio stesso:
in parte, ma non completamente.
Si può indagare il cervello
col cervello stesso:
in parte, ma non completamente.
E così via.

Per giustificare se stesso
ogni possibile sistema
deve trascendersi,
e quindi distruggersi.

Essere "sufficientemente ricco" o no:
la coerenza
è o un difetto
o una impossibilità.

(Certezza = incoerenza)

Ogni possibile cavaliere,
quale Münchausen
o te stesso, è un sottosistema
di una palude sufficientemente ricca.

E un sottosistema di questo sottosistema
sono i tuoi capelli,
per cui ti tirano
riformisti e bugiardi.

In ogni sistema sufficientemente ricco,
quindi anche nella nostra palude,
si possono formulare proposizioni
che all'interno del sistema stesso
non si possono nè provare nè refutare.

Afferra queste proposizioni,
e tira!

4.4 Musica

Il compositore di avanguardia Hans Werner Henze ha utilizzato il poema di Enzensberger nel suo *Secondo Concerto per Violino*, del 1971. Secondo la partitura il violino solista entra in scena frettolosamente, indossando un tricorno piumato ed una cappa da opera che (per sua fortuna) può togliersi per suonare. A tempo debito, per quanto possa essercene uno, egli recita l'enunciato del teorema di Gödel al microfono; il resto del poema, opportunamente trattato elettronicamente, deve essere trasmesso da un registratore; gli ultimi versi sono però recitati dal vivo, da una voce fra il pubblico. Al momento di uscire di scena il violino reindossa tricorno e cappa ed abbandona frettolosamente il palcoscenico, presumibilmente per sfuggire alle reazioni del pubblico rimasto in sala.

Per un analogo motivo, è forse bene che ci affrettiamo ad imitarlo pure noi.

Bibliografia

Trattamenti del teorema di Gödel, per tutti i gusti, si trovano (oltre che in ogni manuale di logica matematica) in:

- Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher e Bach*, Adelphi, 1984.
- Gabriele Lolli, *Incompletezza*, Il Mulino, 1992.
- Ernest Nagel e James Newman, *La prova di Gödel*, Boringhieri, 1993.
- Stuart Shanker (curatore), *Il teorema di Gödel*, Muzzio, 1991.
- Raymond Smullyan, *Forever undecided: a puzzle guide to Gödel*, Knopf, 1987.
- Raymond Smullyan, *Gödel's incompleteness theorems*, Oxford University Press, 1992.