

GIOCHI PERICOLOSI

Piergiorgio Odifreddi

Agosto 1995

La vita ci costringe a fare continue scelte ad ogni livello (personale, familiare, sociale) e in ogni campo (morale, economico, politico), in situazioni di conoscenza imperfetta della situazione, del comportamento altrui, e degli effetti delle varie scelte.

Nonostante la sua complessità, il processo decisionale può comunque essere modellato con strumenti matematici, nella maniera tipica della scienza: astraendo cioè dalle situazioni reali elementi significativi che si prestino ad un trattamento formalizzato.

La branca della matematica che si interessa di tali problemi si chiama *teoria dei giochi*, ed il suo nome è emblematico: per giochi si possono infatti intendere sia i contenuti della teoria stessa, che i processi da essa modellati.

Mentre la prima interpretazione è espressione di un atteggiamento equilibrato, che vede la matematica e le sue applicazioni come drastiche semplificazioni della realtà, la seconda è invece espressione di un atteggiamento monomaniacale, che riduce la complessità del mondo reale alla rigidità del formalismo matematico e scientifico.

Nel primo caso la teoria potrà essere utilmente usata come un mezzo approssimativo per l'analisi di una situazione, e la scelta di un relativo comportamento razionale. Nel secondo caso essa diverrà invece un fine assoluto, una camicia di forza in cui costringere la realtà a discapito della sua fluidità.

Inutile dire che, almeno nel mondo occidentale, è stata la seconda alternativa ad avere la meglio, a cominciare da John von Neumann (il primo grande

⁰Testo di una conferenza al Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 23 Novembre 1995.

esponente della teoria dei giochi¹), per continuare coi ricercatori della RAND Corporation (fra i quali John Nash, premio Nobel per l'economia nel 1994 con John Harsanyi e Reinhard Selten), e per finire coi numerosi consiglieri militari,² economici e politici della Casa Bianca (o di altri colori) negli ultimi cinquant'anni.

Giochi di coppia

Alcune fra le ipotesi semplificative a cui alludevamo, che da un lato rendono possibile la trattazione matematica ma dall'altro la allontanano dalla realtà delle cose, consistono nel considerare giochi fra giocatori completamente razionali, il cui unico interesse sia vincere, e che abbiano un'informazione perfetta (sia della situazione che degli effetti delle azioni proprie e altrui): è ovvio che nella vita i 'giocatori' saranno razionali solo in certa misura, potranno avere interessi molteplici, ed avranno solo informazioni parziali.

Fatte queste ipotesi (con le relative riserve), consideriamo una situazione in cui due³ persone 1 e 2 hanno la possibilità di cooperare (*C*) o no (*N*) fra loro, ottenendo un guadagno (eventualmente negativo, cioè una perdita) che dipende dal comportamento di entrambi.

Tipiche situazioni di cooperazione sono l'altruismo, la democrazia, il comunismo e l'internazionalismo, mentre tipiche situazioni di non cooperazione

¹I primi lavori sulla teoria dei giochi sono di Ernst Zermelo nel 1912 ed Émile Borel nel 1921, ma fu von Neumann a provare nel 1928 il primo teorema profondo (detto 'minimax'), ed a pubblicare nel 1944 con Oskar Morgenstern il primo testo fondamentale (*Theory of games and economic behavior*).

²Forse a causa dell'infantilismo mentale e morale di chi la pianifica e la pratica (cioè, politici e militari), esiste una lunga storia di simulazione della guerra mediante giochi anche sofisticati, dal *Kriegspiel* prussiano dell'800 al *Simnet* statunitense dell'era elettronica. Le applicazioni militari della teoria dei giochi non sono dunque inaspettate, e risalgono alle sue origini: Borel fu ministro della Marina francese nel 1925; di von Neumann sarebbe più facile dire per chi *non* si prostituì; la RAND Corporation fu fondata nel 1948 con finanziamenti dell'aeronautica statunitense (che fu per anni il suo solo cliente), e sarebbe più facile dire chi *non* vi collaborò (a partire, evidentemente, da von Neumann).

³L'estensione della teoria a giochi con più di due giocatori introduce complicazioni non completamente risolte. Poichè le preferenze individuali creano, su ciascuna alternativa, due opposte *alleanze* o *coalizioni* fra giocatori, si potrebbe pensare di ridurre il gioco multiplo originario a quello fra le due sole alleanze: ma ciò è complicato dal fatto che le alleanze cambiano con le diverse alternative. Esempi di giochi collettivi sono le elezioni, e più in generale le scelte sociali (vedi *La democrazia impossibile*).

sono l'egoismo, il totalitarismo, il capitalismo e il nazionalismo.

Un tipico guadagno è ovviamente il denaro ma, poichè non tutto è quantificabile in termini monetari, la teoria presuppone solo una misura astratta di *utilità*, e lascia aperto il problema di una sua determinazione (a parte l'asserire che una funzione di utilità a valori reali esiste se e solo se l'ordine delle preferenze individuali è totale e transitivo). La determinazione è complicata dal fatto che l'utilità è variabile nel tempo: è ben noto ad esempio, e Dostoevsky l'ha ben raccontato ne *Il giocatore*, che col progredire del gioco si è disposti a rischiare di più. Inoltre, spesso l'utile è influenzato dalla storia passata di un individuo, dall'ambiente e dal contesto in cui si gioca, dal tipo di gioco, e così via. Infine, l'utile (medio o assoluto) di alcuni giochi può anche essere negativo: ad esempio, quando si partecipa ad una lotteria o si stipula un'assicurazione si gioca una piccola somma che quasi certamente si perderà, con la speranza di fare un grosso guadagno nel primo caso, e di evitare una grossa perdita nel secondo.

Il guadagno del primo giocatore si può rappresentare con una tabella del tipo seguente:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	x_{CC}	x_{CN}
1 non coopera	x_{NC}	x_{NN}

Il guadagno del secondo giocatore si può rappresentare con una tabella analoga:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	y_{CC}	y_{CN}
1 non coopera	y_{NC}	y_{NN}

Per comodità, le due tabelle possono poi essere unificate in una sola:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	x_{CC}, y_{CC}	x_{CN}, y_{CN}
1 non coopera	x_{NC}, y_{NC}	x_{NN}, y_{NN}

La teoria dei giochi cerca da un lato di ricondurre situazioni di potenziale confronto o conflitto a giochi del tipo precedente, e dall'altro di determinare il (o, almeno, un) comportamento razionale per i giocatori: la prima fase corrisponde alla costruzione di un *modello*, e la seconda alla sua *analisi*.

Uno strumento (abbastanza) soddisfacente per l'analisi di un gioco è la seguente nozione, introdotta da von Neumann nel 1928 e perfezionata da Nash nel 1950:⁴ uno stato del gioco è un *equilibrio di Nash* se esso rappresenta una situazione in cui entrambi i giocatori non hanno recriminazioni da fare, nel senso che anche sapendo in anticipo quale sarebbe stato il comportamento dell'altro giocatore, essi si sarebbero comportati nello stesso modo (in altre parole, la situazione non è migliorabile con atti *individuali* unilaterali, benchè possa in generale esserlo con atti *collettivi*).

È abbastanza ovvio che se uno stato *non* è di equilibrio allora non è razionale: almeno un giocatore avrà infatti in seguito motivo per pensare che avrebbe potuto far meglio. Quindi l'equilibrio di Nash costituisce una condizione necessaria per un comportamento razionale, ma il problema è che (come vedremo negli esempi) esso non costituisce una condizione sufficiente: ci sono giochi i cui equilibri di Nash non sono per niente razionali, e in cui l'unico comportamento razionale è quindi quello di non giocare!

1 Giochi simmetrici

Un tipo semplice di gioco (detto *simmetrico*) è quello in cui i due giocatori hanno lo stesso guadagno in condizioni analoghe, cioè

$$x_{CC} = y_{CC} \quad x_{NN} = y_{NN} \quad x_{CN} = y_{NC} \quad x_{NC} = y_{CN}.$$
⁵

Se esiste un comportamento razionale per i due giocatori in un gioco simmetrico, esso deve ovviamente essere lo stesso per entrambi: o tutti collaborano, o nessuno collabora.⁶ Non sorprendentemente, le strategie razionali si potranno quindi riformulare come variazioni di massime etiche ubique nella

⁴John von Neumann, 'Zur Theorie der Gesellschaftsspiele', *Mathematische Annalen*, 100 (1928) 295–320, e John Nash, 'Equilibrium points in n -person games', *Proceedings of the National Academy of Science*, 36 (1950) 48–49.

⁵Le prime due condizioni sono ovvie. Le altre due anche, quando si ricordi che ad esempio x_{CN} è ciò che 1 guadagna se 1 collabora e 2 non collabora, mentre y_{NC} è ciò che 2 guadagna se 1 non collabora e 2 collabora, e quindi in entrambi i casi si ha il guadagno di un giocatore nel caso che esso collabori e l'altro no.

⁶Naturalmente questo vale solo da un punto di vista astratto, poichè presuppone che tutti gli individui abbiano sempre lo stesso concetto di razionalità (il che effettivamente avviene, secondo la *dottrina di Harsanyi*, a parità di condizioni biologiche, storiche e ambientali).

storia: la regola aurea di Confucio (*Analecta*: “non fare agli altri ciò che non vorresti fosse fatto a te”), il precetto evangelico di Gesù (*Vangelo secondo Matteo*, VII, 12: “fai agli altri ciò che vorresti fosse fatto a te”), la regola di Hobbes (*Leviatano*: “quod tibi fieri non vis, alteri non feceris”), l’imperativo categorico di Kant (*Critica della ragion pratica*: “fai ciò che vorresti che tutti facessero”).

Fra i giochi simmetrici, particolarmente semplici sono quelli puramente *qualitativi*, in cui cioè non è l’importo assoluto dei guadagni che conta per i giocatori (nel qual caso il gioco si direbbe *quantitativo*), ma solo il loro valore relativo. Il gioco è allora completamente determinato dal modo in cui i giocatori ordinano le quattro possibilità

$$CC \quad CN \quad NC \quad NN.$$

Ci sono 24 tipi di giochi simmetrici qualitativi in cui l’ordinamento è totale (tale cioè che i giocatori sanno sempre decidere, date due possibilità, quale di esse preferiscono all’altra).⁷

Dei 24 giochi simmetrici qualitativi alcuni sono particolarmente interessanti, e fanno rientrare dalla finestra l’asimmetria che era stata fatta uscire dalla porta: essi sono quelli in cui ciascun giocatore preferirebbe che, qualunque fosse il proprio comportamento, l’avversario cooperasse! Dal punto di vista del primo giocatore, questa condizione si traduce nella richiesta che le due *C* del secondo giocatore precedano le sue due *N* nell’ordinamento, e riduce i possibili giochi a 4:

$$\begin{aligned} CC &> NC > CN > NN \\ CC &> NC > NN > CN \\ NC &> CC > CN > NN \\ NC &> CC > NN > CN. \end{aligned}$$

Questi quattro giochi illustrano tutte le possibilità di equilibri di Nash per giochi simmetrici,⁸ e vale la pena di esaminarli uno ad uno.

⁷La prima possibilità nell’ordinamento può essere una qualunque delle 4, la seconda una qualunque delle rimanenti 3, la terza una qualunque delle rimanenti 2, e l’ultima deve essere quella rimasta: ci sono dunque $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ordinamenti.

⁸Dato un gioco di coppia, la determinazione degli equilibri di Nash si può fare facilmente nel modo seguente. Si considera la tabella del primo giocatore, e si pone in ciascuna colonna (che rappresenta un comportamento fisso del secondo giocatore) una freccia che

Il gioco determinato da

$$CC > NC > CN > NN$$

è il meno problematico, perchè valuta una situazione tanto migliore quanta più cooperazione c'è.

Il ragionamento del primo giocatore si può riassumere nel seguente modo: la cooperazione di entrambi (CC) è la migliore delle ipotesi, e la non cooperazione di entrambi (NN) la peggiore; se comunque uno solo di noi coopera, è meglio che sia lui (NC) che non io (CN).

Poichè in un gioco qualitativo solo l'ordine delle preferenze conta, esso si può descrivere assegnando a queste valori numerici altrimenti arbitrari (ad esempio da 0 a 3). La tabella del gioco precedente diventa allora:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	3, 3	1, 2
1 non coopera	2, 1	0, 0

In questo caso la situazione è particolarmente semplice, perchè la mutua cooperazione è l'unico equilibrio di Nash (in grassetto). Infatti, seguendo il procedimento indicato nella nota 8, si ha:

3	1	3 ← 2	(3,3) ← (1,2)
↑	↑		↑ ↑
2	0	1 ← 0	(2,1) ← (0,0)

va dalla possibilità meno favorevole a quella più favorevole (essa rappresenta un possibile miglioramento della strategia del primo giocatore): ci sono solo quattro possibilità, poichè le frecce possono essere rivolte entrambe in alto, entrambe in basso, una in alto ed una in basso, o viceversa. Si considera poi la tabella del secondo giocatore, e si pone in ciascuna riga (che rappresenta un comportamento fisso del primo giocatore) una freccia analoga (che rappresenta un possibile miglioramento della strategia del secondo giocatore): di nuovo ci sono quattro possibilità. Ponendo insieme le frecce delle due tabelle, gli eventuali punti a cui esse tendono sono gli equilibri di Nash.

Le 16 combinazioni (che includono ovviamente casi in cui le frecce girano in tondo, e quindi gli equilibri di Nash *non* esistono) si riducono a 4 per i giochi simmetrici, perchè le frecce del secondo giocatore si ottengono da quelle del primo mediante una riflessione rispetto alla diagonale NO-SE. E in ciascuno dei quattro casi gli equilibri di Nash esistono, come vedremo negli esempi.

Non c'è dunque nè scelta nè dilemma, perchè una sola possibilità si presenta ed è simmetrica: *fai agli altri ciò che credi sarà fatto a te.*⁹

Nella vita reale ci si trova di fronte ad un tale gioco ogni volta che *si aiuta il prossimo sapendo (o credendo) che esso aiuterà noi*, o quando *si decide di fare l'azione giusta sapendo che anche gli altri (probabilmente) la faranno*: casi tipici sono le azioni di obbedienza civile (ad esempio guidare a destra, o pagare le tasse: si intende, in paesi diversi dal nostro).

La caccia al cervo

Il gioco determinato da

$$CC > NC > NN > CN$$

si chiama *caccia al cervo*, a causa di un passo tratto dal *Discorso sull'origine della diseguaglianza fra gli uomini* di Jean Jacques Rousseau, del 1755.

L'idea di Rousseau è che le società umane siano evoluzioni delle temporanee alleanze rese necessarie dalla caccia di grandi animali, sui quali un individuo isolato non avrebbe potuto avere la meglio. Ma mentre due individui stanno, ad esempio, partecipando ad una caccia al cervo, può capitare che uno di essi veda una lepre, che potrebbe cacciare da solo: ecco quindi nascere la tentazione di correrle dietro, sulla base della considerazione che benchè un cervo sia meglio di una lepre, una lepre è meglio di niente. La tentazione viene rafforzata dal pensiero che anche l'altro cacciatore potrebbe vedere una lepre, e abbandonare egli stesso la caccia al cervo: in questo caso continuare a collaborare avrebbe per il primo l'effetto di rinunciare sia al cervo che alla lepre, e sarebbe quindi l'alternativa peggiore.

Il ragionamento di ciascun giocatore si può dunque riassumere nel seguente modo: la cooperazione di entrambi (CC) è la migliore delle ipotesi, perchè ci permette di cacciare il cervo; se io non coopero, è meglio che lui continui a cooperare (NC), perchè se non prendo la lepre io posso così tornare al mio posto e continuare a cacciare il cervo; se lui non coopera, è meglio che anch'io non cooperi (NN), perchè così anch'io ho una possibilità di prendere

⁹La cooperazione è in questo caso un comportamento *dominante*, nel senso che è preferita qualunque sia il comportamento dell'avversario (in quanto le due frecce di ciascun giocatore vanno nella stessa direzione). Un comportamento dominante è ovviamente razionale, e nei (pochi) casi in cui esiste esso rappresenta l'ovvia scelta.

la lepre; se invece io continuassi a cooperare (CN), certamente non prenderei nè il cervo nè la lepre.

Assegnando i soliti valori numerici arbitrari (da 0 a 3) alle quattro possibilità, la tabella del gioco diventa ora:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	3, 3	0, 2
1 non coopera	2, 0	1, 1

In questo caso la situazione è leggermente complicata dal fatto che ci sono due equilibri di Nash (in grassetto), che si ottengono nel solito modo:

3	0	3 ← 2	(3,3) ← (0, 2)
↑	↓		↑ ↓
2	1	0 → 1	(2, 0) → (1,1)

Ci sono dunque due possibilità, entrambe simmetriche, e ad esse si accompagna un dilemma. Infatti, da un lato la mutua cooperazione (*fai agli altri ciò che spero sarà fatto a te*) è considerata più desiderabile (perchè $CC > NN$); dall'altro, la mutua non cooperazione (*non fare agli altri ciò che temi non sarà fatto a te*) è considerata meno rischiosa, guardando al peggio che può succedere quando si cooperi o non si cooperi (perchè $NN > CN$).¹⁰ Sia cooperare che non cooperare possono dunque essere considerati comportamenti razionali, e la scelta fra essi dipenderà dalla fiducia o dal dubbio che si nutrono sulla cooperazione altrui.

Nella vita reale ci si trova di fronte ad un tale gioco ogni volta che *si aiuta il prossimo sperando che esso aiuterà noi*, o quando *si decide di fare l'azione giusta sperando che anche gli altri la faranno*: casi tipici sono le azioni di disobbedienza civile, la non collaborazione a progetti immorali, la ribellione al potere in condizioni politicamente mature, ...

¹⁰Nella terminologia introdotta da Harsanyi e Selten in *A general theory of equilibrium selection in games*, del 1988, la non cooperazione è *dominante rispetto al rischio*. Ovviamente, un comportamento dominante (vedi nota 9) è dominante anche rispetto al rischio, ma la caccia al cervo dimostra appunto che il contrario non vale: essa non ammette infatti comportamenti dominanti (perchè le frecce vanno in direzioni opposte).

La corsa del coniglio

Il gioco determinato da

$$NC > CC > CN > NN$$

si chiama *corsa del coniglio*, a causa di una scena del film con James Dean *Gioventù bruciata*, del 1955: in essa dei teenagers si sfidano a guidare automobili (ovviamente rubate) a tutta velocità verso un precipizio, e quello che salta fuori per primo è un ‘coniglio’ (nel senso di un ‘fifone’).¹¹

Bertrand Russell modificò leggermente il gioco ne *Il senso comune e la guerra nucleare*, del 1959, per descrivere la situazione di tensione fra Stati Uniti e Unione Sovietica: i teenagers diventano dei giovani ‘degenerati’, le due auto vengono dirette a tutta velocità una contro l’altra su un rettilineo, e vince chi non vira.

Il ragionamento di ciascun giocatore si può riassumere nel seguente modo: la migliore delle ipotesi è che io non cooperi e lui sì (NC), perchè allora io vinco e lui è un ‘coniglio’; se io coopero è meglio che anche lui cooperi (CC), così che io non faccio la figura del ‘coniglio’ da solo; se comunque lui non coopera, è meglio che io cooperi (CN), per evitare di schiantarci; la non cooperazione di entrambi (NN) è la peggiore delle ipotesi, perchè assicura la mutua distruzione.

La tabella del gioco è ora:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	2, 2	1, 3
1 non coopera	3, 1	0, 0

Anche in questo caso ci sono due equilibri di Nash (in grassetto), che si ottengono nel solito modo:

2	1	2	→	3	(2, 2)	→	(1, 3)
↓	↑				↓		↑
3	0	1	←	0	(3, 1)	←	(0, 0)

¹¹Riguardo al film, possiamo aggiungere da un lato che nell’originale (*Rebel without a cause*) il gioco si chiamava *chickie run* (evidentemente, per gli anglosassoni i polli sono dei conigli!), e dall’altro che James Dean morì poco dopo l’uscita del film, uscendo di (auto)strada a 160 all’ora.

La scelta è però solo apparente, a causa del fatto che la simmetria del gioco richiede che un comportamento razionale sia adottabile da entrambi i giocatori, mentre nessuno dei due equilibri di Nash (*fai agli altri ciò che spera non sarà fatto a te, e non fare agli altri ciò che temi sarà fatto a te*) lo è: essi riflettono la natura poco equilibrata (o squilibrata) dei giocatori, che vogliono essere *forti coi deboli e deboli coi forti* (poichè $NC > CC$ e $CN > NN$). Non esiste dunque una strategia razionale per il gioco, anche se la cooperazione è meno rischiosa.¹²

Nella vita reale ci si trova di fronte ad un tale gioco ogni volta che *non si aiuta il prossimo sperando che esso aiuterà noi*, o quando *si decide di fare l'azione sbagliata sperando che gli altri non la faranno*: casi tipici sono da una parte le sfide (politiche, economiche, militari) in cui uno dei due contendenti gioca il tutto per tutto nella speranza che l'altro ceda, rischiando il comune disastro (ad esempio la crisi di Cuba, la corsa agli armamenti, lo spiegamento dei missili SS-20 in Europa, la guerra del Golfo, ...), e dall'altra i comportamenti asociali che provocherebbero disastri se fossero generalizzati, ed a cui si adatta il rimprovero "e se tutti facessero come te?".¹³

Il dilemma del prigioniero

Il gioco determinato da

$$NC > CC > NN > CN$$

si chiama *dilemma del prigioniero*, a causa della versione proposta da Albert Tucker nel 1950.

In realtà il dilemma risale almeno al *Leviatano* di Thomas Hobbes, del 1651. La sua idea è che le società umane siano alleanze rese necessarie dal contenimento del violento stato di natura, fondato da un lato sull'aggressione contro tutti (la preferenza per la non cooperazione propria), e dall'altro sulla paura di chiunque (la preferenza per la cooperazione altrui): una situazione

¹²Nella terminologia delle note 9 e 10, non esiste un comportamento dominante (perchè le frecce vanno in direzioni opposte), ma la cooperazione è dominante rispetto al rischio (perchè $CN > NN$).

¹³Nel romanzo *Catch-22* di Joseph Heller, un ufficiale cerca di convincere un soldato riluttante a partecipare ad un'azione suicida, dicendogli appunto: "E se tutti facessero come te?", al che il soldato risponde: "Beh, allora sarei un bel cretino a far diversamente, no?".

appunto da dilemma del prigioniero. Mediante il contratto sociale gli individui rinunciano al diritto di far violenza in cambio della sicurezza di essere protetti, e l'ordine sociale risulta essere favorevole non soltanto a coloro che lo impongono, ma a tutti: il risultato del contratto sociale è quindi un cambiamento delle regole del gioco (ad esempio, un passaggio dal dilemma del prigioniero alla caccia al cervo¹⁴).

La storia di Tucker è comunque che due sospetti di un crimine sono arrestati, ed interrogati separatamente. Viene loro detto che se uno dei due denuncia l'altro riceverà una taglia e sarà liberato, mentre il complice sarà condannato alla pena intera; se però entrambi si denunciano a vicenda, allora entrambi saranno condannati ad una pena ridotta; se invece nessuno dei due parla, entrambi saranno liberati.

Il ragionamento di ciascun giocatore si può riassumere nel seguente modo: la migliore delle ipotesi è che io parli e l'altro no (NC), così che non solo io sono liberato, ma prendo anche la taglia; la seconda migliore ipotesi è che nessuno di noi parli (CC), perchè almeno io sono liberato; se però l'altro decide di parlare, il meglio è che anch'io parli (NN), perchè così almeno prendo una pena ridotta; la peggiore delle ipotesi è che solo l'altro parli (CN), perchè allora io sono condannato all'intera pena.

La tabella del gioco è ora:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	2, 2	0, 3
1 non coopera	3, 0	1, 1

In questo caso c'è un solo equilibrio di Nash (in grassetto), che si ottiene nel solito modo:

2	0	2 → 3	(2, 2) → (0, 3)
↓	↓		↓
3	1	0 → 1	(3, 0) → (1, 1)

Benchè ci sia una sola possibilità, che è simmetrica, ad essa si accompagna comunque un dilemma. Infatti, da un lato la non cooperazione (*non fare agli altri ciò che temi non sarà fatto a te*) è la sola possibilità razionale; dall'altro la cooperazione (*fai agli altri ciò che spera sarà fatto a te*) è però

¹⁴Anche il passaggio dalla caccia al cervo al dilemma del prigioniero è possibile, quando entrambi i cacciatori vedono una lepre.

considerata più desiderabile (perchè $CC > NN$).¹⁵ Il dilemma formalizza quindi un conflitto fra razionalità e interesse, che sembra essere tipico di molte situazioni concrete.

Nel melodramma il dilemma è stato descritto ad esempio nella *Tosca* di Giacomo Puccini, del 1900: il commissario Scarpia ha condannato l'amante di Tosca a morte, e le offre di salvarlo (facendolo fucilare a salve), in cambio di una notte d'amore (presumibilmente, non a salve). In ordine decrescente di preferenza, Tosca ha le seguenti possibilità: salvare l'amante senza cedere (NC), salvare l'amante cedendo (CC), non salvare l'amante senza però cedere (NN), e non salvare l'amante pur cedendo (CN). Tosca e Scarpia decidono di comportarsi entrambi razionalmente, seguendo l'equilibrio di Nash: lei lo pugnala prima di concederglisi, e lui l'ha già tradita dando l'ordine di fucilare l'amante.

Nel vita reale il dilemma si presenta ogni volta che *non si aiuta il prossimo temendo che esso non aiuterà noi*, o quando *si decide di non fare l'azione giusta temendo che anche gli altri non la faranno*: casi tipici sono da una parte le situazioni (politiche, economiche, militari) in cui nessuno dei due contendenti è disposto a fare il primo passo per il raggiungimento di un benessere comune (ad esempio il disarmo, i negoziati di pace, ...), e dall'altra i comportamenti sociali che provocherebbero benessere se fossero generalizzati, ed a cui si adatta la recriminazione "se tutti smettessimo di fare così!" (ad esempio di pagare tangenti, di non pagare tasse e imposte,¹⁶ di votare in un certo modo, ...).

A scanso di equivoci, è bene comunque sottolineare che la cooperazione è

¹⁵Nella terminologia della nota 9, la non cooperazione propria è addirittura un comportamento dominante: è meglio per me che io non cooperi, qualunque cosa l'altro faccia. D'altra parte, anche la cooperazione altrui è un comportamento dominante: è meglio per me che l'altro cooperi, qualunque cosa io faccia. Il dilemma deriva dalla simmetria del ragionamento, che vale per entrambi i giocatori.

A favore della cooperazione sembra andare il seguente ragionamento: poichè il gioco è simmetrico il comportamento razionale deve essere o CC o NN , ed il primo è preferito al secondo. L'errore sta nel *supporre* che sia CC che NN siano possibilità razionali, mentre il problema della teoria dei giochi sta appunto nel *determinare* quali siano tali possibilità, per poi scegliere fra esse.

¹⁶Secondo il Ministero delle Finanze, se l'evasione fiscale del solo 1991 venisse recuperata, per cinque anni non sarebbe necessaria una legge finanziaria (il mancato introito della sola IVA è stato infatti di 100.000 miliardi). Se poi il recupero divenisse permanente, si potrebbero abbassare le tasse del 25-30%.

più vantaggiosa per i due giocatori, ma non necessariamente per la società: ad esempio, i cartelli dei prezzi si possono vedere come la scelta di cooperazione fra venditori, che rinunciano alla competizione per trarre un maggior guadagno collettivo a danno dei consumatori, in un dilemma del prigioniero.

Giochi iterati

Abbiamo finora ragionato come se i vari giochi considerati venissero giocati una sola volta. Se essi vogliono però riflettere in qualche modo situazioni della vita reale, si dovrà loro permettere di essere iterati indefinitamente: cooperazione e non cooperazione potranno allora essere alternate, in proporzioni variabili, anche in risposta (positiva o negativa) al comportamento altrui. Usando frequenze arbitrarie si otterrà uno spettro infinito di possibili comportamenti, e ci sarà quindi la possibilità di avere infiniti equilibri.

Ad esempio, mentre *non cooperare mai* continua ad essere un equilibrio di Nash per il dilemma del prigioniero iterato, ora lo diventano anche sia *cooperare sempre* che il cosiddetto *pan per focaccia* (TIT-FOR-TAT in inglese), che richiede di iniziare con una cooperazione e di continuare ripetendo il comportamento che l'altro giocatore ha tenuto nella giocata precedente.¹⁷

In un esperimento del 1980 Robert Axelrod ha giocato varie strategie per il dilemma del prigioniero iterato una contro l'altra, facendole riprodurre in modo proporzionale al loro successo: l'idea era di studiare un possibile modello evolutivo di schemi comportamentali, e il risultato fu che 'pan per focaccia' divenne la strategia più diffusa del modello. I motivi sembrerebbero essere molti: la strategia è semplice e persuasiva, non è aggressiva ma neppure passiva, reagisce in modo immediato (subito) e moderato (una volta sola) sia

¹⁷Che la non cooperazione sia un equilibrio di Nash deriva dal fatto che essa è dominante per il gioco non iterato. Che la cooperazione sia un equilibrio deriva dal fatto che essa è ciò che si ottiene se entrambi i giocatori giocano 'pan per focaccia'. Che quest'ultima sia un equilibrio deriva dal fatto che non conviene per uno dei due giocatori (ad esempio il primo) incominciare a non cooperare, per poi eventualmente ritornare a cooperare, perchè questo provocherebbe una successione di guadagni del tipo seguente

primo giocatore	:	... 22311 ... 1022 ...
secondo giocatore	:	... 22011 ... 1322 ...

con una perdita rispetto alla successione composta di soli 2 che si avrebbe se entrambi continuassero a giocare 'pan per focaccia': il primo giocatore può dunque recriminare.

alle provocazioni che ai pentimenti, e non ha bisogno di segretezza. E le conseguenze sembrerebbero essere chiare: la reciprocità è un comportamento evolutivamente vincente, il che giustifica a posteriori la sua ubiquità in massime, precetti e leggi.

Un'analisi teorica rivela però che tali considerazioni empiriche possono essere fuorvianti. Si può infatti calcolare la stabilità evolutiva di un comportamento in un gioco simmetrico immaginando di avere una popolazione i cui individui cooperino con probabilità p , e quindi non cooperino con probabilità $1 - p$. Se la capacità di sopravvivenza di un individuo è misurata dal suo potenziale guadagno globale, per un individuo che cooperi essa sarà

$$x_{CC} \cdot p + x_{CN} \cdot (1 - p),$$

mentre per un individuo che non cooperi essa sarà

$$x_{NC} \cdot p + x_{NN} \cdot (1 - p).$$

La condizione affinché ad esempio la cooperazione sia evolutivamente vincente è dunque

$$x_{CC} \cdot p + x_{CN} \cdot (1 - p) > x_{NC} \cdot p + x_{NN} \cdot (1 - p).$$

Nel caso del dilemma del prigioniero essa diventa

$$2p + 0 \cdot (1 - p) > 3p + (1 - p),$$

che si riduce all'impossibile disuguaglianza $0 > 1$: in altre parole, *l'unica condizione di stabilità evolutiva nel dilemma del prigioniero è quella in cui nessuno coopera*. Per la caccia al cervo e la corsa del coniglio la stabilità evolutiva si ottiene invece quando esattamente metà della popolazione coopera, e per il primo gioco (considerato agli inizi) quando tutti cooperano.

2 Giochi non simmetrici

Lasciando cadere la condizione di simmetria, il numero dei possibili giochi aumenta rapidamente: anche considerando soltanto giochi qualitativi, le 24 possibilità di ordinare le preferenze di ciascun giocatore si possono combinare in $24^2 = 576$ giochi.

Ovviamente, nel caso di giochi non simmetrici la strategia razionale non è più necessariamente la stessa per entrambi i giocatori, e gli equilibri di Nash possono anche non esistere.

Rivelazioni

Un esempio di gioco non simmetrico qualitativo è *rivelazioni*, che si ispira al problema della fede nelle religioni rivelate.

I due giocatori sono qui da una parte Dio (supponendo che esista), e dall'altro l'uomo: il primo ha la scelta se rivelarsi (C) o no (N), ed il secondo se credere (C) o no (N).

Il ragionamento di Dio (giocatore 1) si può riassumere nel seguente modo: la cosa migliore è che l'uomo creda, meglio senza che mi riveli (NC : "beati coloro che non hanno visto, ed hanno creduto", *Vangelo secondo Giovanni*, XX, 29), ma se necessario con la rivelazione (CC : "se non vedete segni e prodigi, voi non credete", *idem*, IV, 48); nel caso che l'uomo non creda, la cosa migliore è che lo faccia in mancanza di rivelazione (NN), perchè sarebbe la sua rovina se egli rifiutasse di credere anche di fronte alla rivelazione (CN : "chi non crederà sarà condannato", *Vangelo secondo Marco*, XVI, 16).

Il ragionamento dell'uomo (giocatore 2) si può invece riassumere nel seguente modo: la cosa migliore per me è che, se Dio c'è, si riveli ed io creda (CC), quella peggiore che si riveli ed io non creda (CN). In mancanza di rivelazione, entrambe le scelte sono possibili: si può sia preferire non credere a credere (come Tommaso: "non ci credo se non ci metto il dito", *Vangelo secondo Giovanni*, XX, 25), che viceversa (come Blaise Pascal: "si rischia di più a non credere se Dio c'è, che a credere se non c'è", *Pensieri*, 164).

Seguendo Tommaso, la tabella del gioco è:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	2, 3	0, 0
1 non coopera	3, 1	1, 2

C'è allora un solo equilibrio di Nash (in grassetto), che si ottiene nel solito modo:

2	0	3 ← 0	(2, 3) ← (0, 0)
↓	↓		↓
3	1	1 → 2	(3, 1) → (1, 2)

Seguendo Pascal la tabella del gioco è invece:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	2, 3	0, 0
1 non coopera	3, 2	1, 1

Anche in questo caso c'è comunque un solo equilibrio di Nash (in grassetto):

2	0	3 ← 0	(2, 3) ← (0, 0)
↓	↓		↓
3	1	2 ← 1	(3,1) ← (1, 2)

In entrambi i casi non c'è dunque scelta, perchè c'è una sola possibilità: che Dio non si riveli, e l'uomo segua la sua preferenza in quel caso.¹⁸ Questa non è evidentemente la storia raccontata dalla Bibbia, secondo cui Dio si è rivelato comunque.

Il giudizio di re Salomone

Un altro esempio di gioco non simmetrico qualitativo è il *giudizio di re Salomone*, che prende il nome da un racconto biblico (*Primo Libro dei Re*, III, 16-28).

La storia è che due donne si presentarono dal re con un bambino, sostenendo entrambe di essere la vera madre. Il re decise di tagliare il bambino in due, per assegnare a ciascuna una metà. Di fronte a tale alternativa la vera madre rinunciò alla spartizione, permettendo che fosse l'altra donna a prendere il bambino, mentre questa aveva acconsentito a che esso fosse diviso. Così facendo ciascuna rivelò la sua vera identità, e Salomone poté assegnare il bambino alla vera madre.

Il ragionamento della vera madre (giocatore 1) si può riassumere nel seguente modo: se l'altra rinuncia al bambino, per me è meglio prenderlo (*NC*) che rinunciarvi (*CC*); se però l'altra non rinuncia, è meglio che lo prenda lei (*CN*) a che egli muoia (*NN*).

Il ragionamento della falsa madre (giocatore 2) si può invece riassumere nel seguente modo: la cosa migliore per me è che l'altra mi lasci avere il bambino (*CN*); se però non posso averlo, preferisco vederlo morto (*NN*) al fatto che vi rinunciamo entrambe (*CC*), o peggio ancora di lasciarlo all'altra (*NC*).

¹⁸Non rivelarsi è una strategia dominante per Dio (in quanto le sue frecce vanno nella stessa direzione). Nel caso di Tommaso non esiste una strategia dominante per l'uomo, perchè è meglio credere se Dio si rivela, e non credere se non si rivela; nel caso di Pascal credere è invece dominante, perchè è meglio indipendentemente dal fatto che Dio si riveli.

La tabella del gioco è ora:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	2, 1	1, 3
1 non coopera	3, 0	0, 2

Anche in questo caso c'è un solo equilibrio di Nash (in grassetto), che si ottiene nel solito modo:

2	1	1	→	3	(2, 1)	→	(1, 3)
↓	↑				↓		↑
3	0	0	→	2	(3, 0)	→	(0, 2)

Non c'è dunque scelta, perchè c'è una sola possibilità (non simmetrica, come il gioco stesso): che la vera madre rinunci al bambino, e la falsa no.¹⁹ E questo è effettivamente ciò che le due donne fanno nella storia biblica.

Nella vita reale ci si trova di fronte ad un tale gioco ogni volta che ci sia un conflitto in cui uno dei contendenti è aggressivo e disposto al peggio, mentre l'altro è difensivo e moderato: il comportamento razionale, triste a dirsi, è che l'aggressore aggredisca e l'aggredito subisca.

Giochi a somma zero

Un tipo interessante di gioco non simmetrico quantitativo è quello detto *a somma zero*, in cui le varie x sono uguali e contrarie alle varie y : ciò che uno dei due giocatori vince, l'altro perde (ovvero, *mors tua, vita mea*). Dal punto di vista individuale ciascun giocatore preferisce quindi la non cooperazione alla cooperazione, visto che cooperare significa semplicemente fare l'interesse altrui e penalizzare se stesso.

Gli equilibri di Nash acquistano in questo caso una interessante interpretazione, scoperta da von Neumann. Essa si basa sul fatto che le frecce usate per la determinazione degli equilibri vanno nella direzione del massimo valore nelle colonne della tabella del primo giocatore, e nelle righe della tabella del secondo giocatore. Poichè però i valori dei due giocatori sono uguali e contrari, le frecce vanno anche nella direzione del minimo valore nelle colonne del secondo giocatore, e nelle righe del primo giocatore. Il procedimento

¹⁹Non cooperare è dominante per la falsa madre, ma cooperare non è dominante per la vera madre (le frecce vanno nella stessa direzione in un caso, ma non nell'altro).

per trovare l'equilibrio si riduce quindi a cercare, per ciascun giocatore, anzitutto il massimo valore che esso otterrebbe giocando ciascuna strategia, e poi il minimo di tali massimi (*minimax*): l'equilibrio si ha quando la posizione del minimax è la stessa nelle tabelle di entrambi i giocatori (ovviamente, i due minimax avranno però segno contrario, e quindi potranno coincidere solo nel caso che entrambi siano 0).²⁰

Nella vita reale i giochi a somma zero sono tipici di situazioni di conflitto totale o di guerra (oltre che dei giochi usuali tipo carte o scacchi), e quando l'equilibrio esiste esso mostra che è possibile avere un comportamento razionale anche in situazioni in cui i giocatori hanno interessi completamente opposti. Esso non fa altro che tradurre la massima di Italo Calvino, in *Se una notte d'inverno un viaggiatore*: il meglio che si possa ottenere è di evitare il peggio.

Giochi squilibrati

Quando un gioco non è simmetrico, è però possibile che non esistano equilibri di Nash.

Un semplice esempio quantitativo in cui questo avviene è il gioco a somma zero detto *pari e dispari*, descritto nella *Lettera rubata* di Edgar Allan Poe: il primo giocatore prende alcune palline in mano, e il secondo giocatore ne vince una se indovina se esse sono pari o dispari, e ne perde una altrimenti. In altre parole, 1 vince se c'è disaccordo, e 2 vince se c'è accordo.

La tabella del gioco è ora:

	2 pari	2 dispari
1 pari	-1, 1	1, -1
1 dispari	1, -1	-1, 1

In questo caso non ci sono equilibri di Nash:

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">↓</td><td style="padding: 2px 10px;">↑</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">-1</td></tr> </table>	-1	1	↓	↑	1	-1	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">←</td><td style="padding: 2px 10px;">-1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-1</td><td style="padding: 2px 10px;">→</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> </table>	1	←	-1	-1	→	1	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">(-1, 1)</td><td style="padding: 2px 10px;">←</td><td style="padding: 2px 10px;">(1, -1)</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">↓</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">↑</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">(1, -1)</td><td style="padding: 2px 10px;">→</td><td style="padding: 2px 10px;">(-1, 1)</td></tr> </table>	(-1, 1)	←	(1, -1)	↓		↑	(1, -1)	→	(-1, 1)
-1	1																						
↓	↑																						
1	-1																						
1	←	-1																					
-1	→	1																					
(-1, 1)	←	(1, -1)																					
↓		↑																					
(1, -1)	→	(-1, 1)																					

²⁰Si noti che nei giochi a somma zero si può avere al più *un* equilibrio di Nash: se ce ne fossero due, tutti i valori della tabella di un giocatore dovrebbero coincidere (perchè le frecce indurrebbero un ordinamento circolare fra i valori).

In termini di minimax, l'equilibrio non esiste perchè il minimax del primo giocatore sta nelle due posizioni corrispondenti all'accordo (il minimo di entrambe le righe nella prima tabella è -1), mentre quello del secondo giocatore sta nelle due posizioni corrispondenti al disaccordo (il minimo di entrambe le colonne nella seconda tabella è -1): i due giocatori non possono dunque simultaneamente realizzare il proprio minimax.

Per ovviare a tali situazioni von Neumann e Nash hanno introdotto la nozione di *equilibrio misto*, in cui il primo giocatore coopera con probabilità p ed il secondo con probabilità q , eh hanno provato il *teorema fondamentale della teoria dei giochi*: per qualunque gioco (finito) esiste almeno un equilibrio misto, e per qualunque gioco simmetrico esiste un equilibrio simmetrico (in cui cioè $p = q$). I precedenti equilibri (detti *puri*) si ottengono come casi particolari, quando p e q siano 0 o 1.

Gli equilibri misti sono in realtà le situazioni di stabilità evolutiva, e la (dis)equazione vista sopra permette dunque di calcolarli per i giochi simmetrici da noi considerati, ottenendo valori di p uguali a:

- 1 per il primo gioco;
- $\frac{1}{2}$ per la caccia al cervo, e la corsa del coniglio;
- 0 per il dilemma del prigioniero.²¹

²¹Questi non sono gli unici valori di p possibili per giochi simmetrici. Ad esempio, nel gioco detto *battaglia dei sessi* si ha $p = \frac{1}{4}$. Il gioco è determinato da

$$NC > CN > NN > CC,$$

e la storia che lo accompagna è la seguente. Due innamorati decidono che andranno alla sera a vedere la partita o il balletto, secondo lo stereotipo secondo cui gli uomini preferiscono la prima e le donne il secondo (come se la scelta non fosse culturale, invece che sessuale), ma senza darsi appuntamento in uno dei due posti.

Il ragionamento di ciascun giocatore è il seguente: la cosa migliore è che entrambi andiamo dove voglio io (NC); la seconda alternativa è che entrambi andiamo dove vuole l'altro, perchè almeno stiamo assieme (CN); se però non ci incontriamo, è meglio che ciascuno vada dove voleva (NN), che non che ciascuno vada dove voleva l'altro (CC).

Gli equilibri di Nash puri sono NC e CN , come per la corsa del coniglio, e la situazione di stabilità evolutiva si ha quando un quarto della popolazione coopera e tre quarti no.

Conclusione

La teoria dei giochi studia da un punto di vista matematico situazioni microscopiche di confronto o conflitto, che vengono poi estese a situazioni macroscopiche con la seguente estrapolazione: la vita è un gioco, che ha per regole le leggi naturali (fisiche, biologiche), e per metaregole le leggi sociali (economiche, politiche, etiche, morali, religiose); le regole sono assolute, e determinano quali sono sia le possibili situazioni di stabilità, cioè gli stati di equilibrio, che le possibili trasformazioni sociali, cioè i passaggi da uno stato di equilibrio ad un altro; le metaregole sono relative, e servono solo a mantenere un particolare stato di equilibrio (in particolare, esse vengono ridefinite in seguito alle trasformazioni sociali).²²

Introducendo la matematica nello studio dei fenomeni sociali, un simile approccio permette di affrontarne versioni semplificate in modo preciso. Mentre la precisione rappresenta un indubbio progresso rispetto alle trattazioni (pre-1950, ma non solo) di filosofi, economisti e politologi, la semplificazione costituisce una indubbia limitazione: la sensatezza o meno dell'approccio dipenderà quindi, in accordo con la teoria, dall'esistenza o meno di un equilibrio fra i due fattori.

Bibliografia

- Robert Axelrod, *The evolution of cooperation*, 1984.
- Ken Binmore, *Game theory and the social contract*, 1994.
- Morton Davis, *Game theory*, 1970.
- John Maynard Smith, *Evolution and the theory of games*, 1982.
- William Poundstone, *Prisoner's dilemma*, 1992.

²²In questo contesto, la differenza politica fra destra e sinistra si riduce al fatto che esse si concentrano, rispettivamente, sui problemi di *mantenimento* e di *selezione* degli equilibri.