Aspetti Logici della Geometria Euclidea Piana

Piergiorgio Odifreddi

Anno Accademico 1991-92

Lo studio della Geometria, nelle sue varie forme, ha costituito una parte essenziale (e, per secoli, l'unica accettabile) della matematica. Non stupisce dunque che proprio nell'affrontare problemi da essa scaturiti e nel tentativo di risolverli si siano introdotti per la prima volta nuovi metodi e nozioni che sono poi diventati patrimonio comune della matematica.

Come si deduce dal titolo, il nostro interesse qui non sta nel trattare sistematicamente una o più parti della Geometria, ma nell'isolare alcuni momenti del suo divenire che hanno interesse da un punto di vista fondazionale: momenti in cui i problemi furono geometrici soltanto per accidente storico, e le soluzioni richiesero innovazioni di natura generale o logica.

I titoli delle sezioni sono stati scelti per suggerire affinitá con lo sviluppo della Logica Matematica, in particolare di quelle parti di essa che si sono interessate allo studio dei fondamenti. La conoscenza di tale sviluppo non è necessaria: anzi, il nostro scopo è appunto quello di mostrare a chi non lo conosce (e ricordare a chi lo conosce) che le nozioni basilari della Logica Matematica sono scaturite da problemi concreti di matematica vera, e che questi ne costituiscono ancora la migliore illustrazione.

Più in generale, nell'era di vuoto pubblicitario nella quale ci tocca vivere, non solo umanamente ma anche matematicamente, e che ha come fine lo sviluppo e non il progresso, rivolgere uno sguardo alla storia ci insegnerà sia come i cambiamenti profondi si presentino ad un ritmo secolare e non settimanale, che dove stiano le radici e le giustificazioni delle 'novità' di oggi.

La trattazione tecnica dei risultati qui citati è esposta in una serie di appendici.

0.1 Dimostrazione

Come il suo stesso nome ricorda, la Geometria (*geo*: terra, e *metrein*: misura) fu agli inizi agrimensura. Come tale essa riunì una serie di osservazioni che furono scoperte dagli Egizi e dai Babilonesi in modo empirico. Alcune di tali osservazioni erano corrette, ad esempio la formula per il volume del tronco di piramide quadrata (nota agli Egizi), o il Teorema di Pitagora (noto ai Babilonesi) ; altre però erano errate, ad esempio il fatto che l'area di un quadrilatero di lati a, b, c e d fosse $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$ (come credettero gli Egizi),[1] o che la circonferenza di un cerchio misurasse tre volte il diametro (come credettero i Babilonesi).

La scoperta del fatto che le 'intuizioni' matematiche potevano giocare brutti scherzi provocò uno stimolo interno alla giustificazione dei risultati matematici. Uno stimolo esterno derivò dal mutamento politico, quando la democrazia greca sostituì il totalitarismo babilonese ed egiziano: un intellettuale greco non poteva certo accettare di buon grado la soluzione oracolare di un problema, seguita da un 'e scoprirai che è così', come nel Papiro di Mosca (che riporta la formula, già citata, per il volume del tronco di piramide quadrata), o da un 'questo è il procedimento', come in molte tavolette cuneiformi.

Talete di Mileto (640–546 A.C.), uno dei dette saggi dell'antichità, essendo a conoscenza dell'inesattezza di alcuni dei risultati degli Egizi e dei Babilonesi, introdusse dunque il concetto di *dimostrazione*, ed iniziò uno sviluppo logico (probabilmente intuitivo) della geometria. La sistematizzazione della geometria piana continuò attraverso Pitagora di Samo (580–500 A.C.), e si concluse con gli *Elementi* di Ippocrate di Chios (440 A.C.) che, sebbene perduti, si ritiene coprissero i primi quattro libri degli *Elementi* di Euclide (300 A.C.).

0.2 Platone e Aristotele

La nuova disciplina matematica divenne presto un modello di ragionamento, ma fece anche sorgere nuovi problemi di giustificazione. Platone (427–347 A.C.) si interessò alla natura degli *oggetti* matematici, e cercò di spiegare che cosa fossero le figure di cui si trattava nella geometria.

La sua soluzione al problema fu il nucleo di una nuova filosofia: le figure

[1] L'area del quadrilatero è $\leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$, ma l'uguaglianza vale soltanto nel caso del rettangolo (nel qual caso $a = c$ e $b = d$, e la formula si riduce a 'base per altezza') e non in generale.

geometriche sono le *idealizzazioni* (o le forme[2]) degli oggetti fisici percepiti mediante le sensazioni. Poichè tali idealizzazioni (o *idee*) posseggono una perfezione che gli oggetti (così come vengono) percepiti non hanno, esse non solo esistono indipendentemente da questi e costituiscono un mondo parallelo a quello sensoriale, ma sono addirittura la 'vera' realtà, di cui il mondo sensoriale è soltanto una pallida immagine (un mondo di ombre percepite sulle pareti di una caverna).

La geometria diviene dunque il modo attraverso cui noi veniamo a conoscenza del mondo delle idee, e come tale acquista una importanza fondamentale: sulla porta dell'Accademia, un motto ammoniva che non dovevano entrare coloro che la ignoravano.

Poichè Platone vedeva nella matematica soltanto un modo per venire a conoscenza del mondo delle idee, che aveva una sua realtà indipendente, egli non sottolineò particolarmente il ruolo della deduzione: essa poteva soltanto rendere esplicito ciò che era già vero indipendentemente. In particolare, la correttezza dei teoremi non poteva certo derivare dalla correttezza della loro dimostrazione, bensì soltanto dal fatto che essi descrivessero una situazione di fatto.

Tale atteggiamento cambiò con Aristotele (384–322 A.C.), che si interessò alla natura del *metodo* matematico. Nell'*Organon* e nella *Metafisica* egli sistematizzò la logica come scienza del ragionamento, enunciando chiaramente che le sue leggi erano state sì formulate sul modello delle dimostrazioni matematiche (ad esempio, la legge di contraddizione sul modello delle dimostrazioni indirette), ma anche che essa doveva essere considerata indipendente dalla matematica, e ad essa precedente. In particolare, la deduzione doveva essere l'unico modo di stabilire la verità di un enunciato matematico.

0.3 Assiomatizzazione

I tempi erano ormai maturi per un trattamento della geometria piana in forma rigorosa, secondo il modello assiomatico introdotto da Eudosso (408–355 A.C.), il più grande matematico dell'antichità dopo Archimede (e inventore del metodo di esaustione e della teoria delle proporzioni), e sistematizzato da Aristotele.

Euclide, basandosi sugli *Elementi* di Ippocrate, produsse i Libri I–IV dei suoi *Elementi*. Questi (che non si limitarono alla geometria, piana e solida, ma inclusero anche le teorie dei numeri e delle proporzioni) divennero

[2]'Idea' deriva appunto da *eidos*: figura, forma.

il testo sacro della matematica greca, e conobbero una fortuna editoriale rivaleggiata soltanto dalla *Bibbia* (nelle sue diverse versioni), a testimonianza della secolare attrazione degli opposti estremismi (pensiero razionale e fede).

Per quanto riguarda la deduzione, Euclide è esplicito nel separare le *assunzioni* dai *teoremi*. In ciò egli segue Aristotele, che vide chiaramente che 'non tutto può essere dimostrato, perchè questo porterebbe ad un regresso infinito' (*Metafisica* Γ 4, 1006a 6–9).

Euclide separa anche, da un altro punto di vista, *logica* e *matematica*. In particolare, le assunzioni sono divise in *assiomi* logici (detti anche nozioni comuni) e *postulati* matematici.[3] Anche qui Euclide segue Aristotele, che distinse le verità comuni ad ogni scienza deduttiva da quelle proprie di una particolare scienza.

I postulati geometrici di Euclide sono solo cinque, ancora in accordo con Aristotele, secondo il quale 'le scienze basate su poche assunzioni sono le più esatte' (*Metafisica* A 2, 982a 25–27). La loro genesi si può facilmente immaginare: il Libro I si conclude con il Teorema di Pitagora (e il suo inverso), e si può leggere all'indietro come lo sviluppo dei risultati necessari a permettere la dimostrazione che Euclide aveva in mente (metà delle Proposizioni precedenti sono usate nella dimostrazione). Questo procedimento di derivazione dei postulati (dalla soluzione di un problema) è caratteristico dell'assiomatizzazione matematica, ed è contrapposto al procedimento detto di rigore informale (vedi Sezione 0.6).

Anche le nozioni comuni sono cinque, una delle quali (3: cose uguali rimangono uguali se vengono loro sottratte cose uguali) era stata citata esplicitamente da Aristotele come esempio di verità logica.[4]

Per quanto riguarda la sintassi, Euclide non separa invece *nozioni definite* da *nozioni indefinite*. Così egli cerca di definire punti e rette, con definizioni che non definiscono nulla (un punto è ciò che non ha parti, una retta è ciò che ha solo lunghezza). E' interessante notare che proprio tali definizioni erano già state criticate come insoddisfacenti da Aristotele, nella sua discussione su punti e rette. Egli aveva esplicitamente avvertito che è compito dei postulati e degli assiomi enunciare le proprietà essenziali delle nozioni indefinite.

[3]La distinzione fra 'assioma' logico e 'postulato' matematico non è più usata oggi, ed in entrambi i casi si parla di assiomi. Noi useremo 'postulato' soltanto quando vogliamo sottolineare l'aspetto storico.

[4]In realtà, la nozione comune 4 (cose che si possono far coincidere sono uguali) è un postulato geometrico, e sta alla base del trattamento della congruenza mediante sovrapposizione.

0.4 Costruttività

Poichè, secondo Aristotele, 'una definizione è l'enunciazione dell'essenza di un oggetto' (*Metafisica* Z 5, 1031a 14) ma non assicura che esso esista, si rende necessaria una prova di esistenza (a meno che questa non venga assunta nei postulati). In geometria, tale metodo risiede nelle *costruzioni*: 'le proposizioni geometriche sono conosciute per mezzo dell'atto, e le veniamo a scoprire eseguendo certe costruzioni' (*Metafisica* Θ 9, 1051a 21–22).

I primi tre postulati di Euclide si riferiscono a costruzioni eseguibili con riga e compasso, e dunque con particolari strumenti limitati:

1. esiste un segmento congiungente due punti dati
2. un segmento si può estendere indefinitamente
3. esiste un cerchio di centro e raggio dati.

La restrizione a rette e cerchi è in accordo con le idee platoniche, perchè tali enti geometrici rispondono alle caratteristiche di simmetria e perfezione ideali care a Platone (alcuni pensano che proprio a lui si debba far risalire la restrizione a riga e compasso nelle costruzioni geometriche).

A prima vista l'uso di tali strumenti limitati dovette sembrare piuttosto restrittivo, ma alcuni successi inaspettati produssero un cambio di percezione, e generarono aspettative irrealiste.

Per quanto riguarda angoli, Euclide mostra come bisecarli (I.9) e riportarli (I.23), e dunque come addizionarli e sottrarli.

Per quanto riguarda poligoni regolari di n lati, Euclide considera i casi di n uguale a 3 (I.1), 4 (I.46), 5 (IV.11), 6 (IV.15) e 15 (IV.16) esplicitamente, ed un gran numero di casi addizionali implicitamente (la Proposizione IV.15 mostra come si possa procedere per bisezione, e dunque ottenere non solo il caso 6 trattato, ma anche 8, 10, 12, eccetera). Euclide non fa parola di casi quali 7, 9, e 17.

Per quanto riguarda la quadratura, Euclide considera rettangoli (II.14), e di qui si possono facilmente trattare prima triangoli (mediante una trasformazione intermedia in rettangoli di area equivalente, bisecando l'altezza), e poi poligoni qualunque (per triangolazione, usando il Teorema di Pitagora per sommare o sottrarre quadrati). La vera novità venne però da Ippocrate di Chios, che quadrò lune costruite su un quarto di cerchio, e mostrò come la quadratura di lune su un sesto di cerchio avrebbe permesso di quadrare il cerchio intero.

Tre problemi classici della geometria piana si rivelarono refrattari a soluzioni in termini di riga e compasso: la trisezione di un angolo, la costruzione dell'ettagono regolare, e la quadratura del cerchio.[5]

Varie soluzioni furono proposte, al di fuori delle restrizioni a riga e compasso, ma la soluzione a questi problemi non si ebbe che nel Secolo XIX (vedi Sezione 0.11).

0.5 Equivalenza Logica

Gli Egizi sapevano che un triangolo di lati 3, 4 e 5 è retto: tale fatto è un caso particolare dell'inverso del Teorema di Pitagora, enunciato nella Proposizione 48 che conclude il Libro I degli *Elementi*: se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei due rimanenti lati, il triangolo è retto (e l'angolo retto è quello opposto al lato maggiore).

Le Proposizioni 47 e 48 esemplificano dunque un caso di equivalenza logica, e caratterizzano i triangoli retti come quelli per i quali vale il Teorema di Pitagora. Euclide fu molto sensibile all'equivalenza logica (cioè all'idea di *condizione necessaria e sufficiente*), e fornisce vari esempi nel corso degli *Elementi*. Nel Libro I, molte delle proposizioni non usate per la dimostrazione del Teorema di Pitagora sono appunto inversi logici di altre proposizioni:

- 5 e 6 (un triangolo è isoscele se e solo se gli angoli alla base sono uguali)
- 13 e 14 (due angoli adiacenti giacciono su una stessa retta se e solo se la loro somma è due retti)
- 27 e 29 (due rette sono parallele se e solo se formano angoli alterni uguali)
- 37 e 39 (due triangoli con la stessa base hanno la stessa area se e solo se hanno la stessa altezza)
- 47 e 48 (un triangolo è retto se e solo se il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati).

L'unico caso di proposizione del Libro I che Euclide prova senza provarne l'inverso è la 28 (due rette tagliate da una trasversale e formanti angoli interni corrispondenti supplementari sono parallele), il cui inverso è il Postulato 5.

[5] Un altro problema classico che appartiene alla stessa serie di quelli appena citati, ma nella geometria solida, è la duplicazione del cubo.

0.6 Rigore informale

L'assiomatizzazione matematica corrisponde ad una analisi di *dimostrazioni* informali (o di soluzioni di problemi), ed implicitamente pone l'accento sui teoremi, che sono già dati in partenza. Le nozioni primitive sono scoperte nel corso dell'analisi, e le loro proprietà sono determinate implicitamente dai teoremi che esse servono a dimostrare.

Un approccio complementare all'assiomatizzazione (rivitalizzato in tempi moderni dalla filosofia analitica) corrisponde invece ad una analisi di *nozioni*. In questo caso l'interesse relativo viene ribaltato: le nozioni primitive sono ora i veri oggetti di studio, e le loro proprietà sono implicite non nelle applicazioni ma nella nozioni stesse. I teoremi che si dimostrano a partire da tali proprietà servono allora non a giustificare l'analisi stessa, ma a determinarne l'estensione.

Un esempio tipico di analisi di nozioni è dato dal concetto di *area*, che interviene in modo essenziale nell'enunciato e nella dimostrazione del Teorema di Pitagora, ma che non fa neppure parte della lista di definizioni data da Euclide agli inizi degli *Elementi*. Addirittura, Euclide non parla mai di 'area', e si limita a parlare di 'uguaglianza' (ovviamente in un senso diverso da quello di sovrapponibilità dopo moto, usato in altre parti degli *Elementi*).

Questa mancanza si può appunto interpretare come una prova del fatto che egli ritenesse le nozioni comuni (che intervengono in modo essenziale in ogni dimostrazione relativa all'area) una assiomatizzazione sufficiente del concetto. In particolare, egli postula per l'uguaglianza:

1. transitività
2. additività
3. sottraibilità
4. invarianza rispetto a congruenza
5. monotonia.

Dalle dimostrazioni che Euclide dà , si deduce che due poligoni hanno per lui *area uguale* se essi sono *equicomplementabili* (cioè se è possibile aggiungere loro un numero finito di poligoni equicomponibili, in modo tale che i poligoni composti siano equicomponibili; e due poligoni sono *equicomponibili* se si possono decomporre in un numero finito di triangoli congruenti).[6]

Nelle nozioni comuni per l'uguaglianza si riconoscono le proprietà fondamentali delle moderne *misure finitamente additive* (in cui la sottraibilità non serve, perchè conseguenza dell'esistenza dell'inverso per la somma). Da esse si può provare l'esistenza di una misura di area (relativamente all'area di un triangolo unitario).

Poichè tutto è definito in termini di triangoli, il punto di partenza è ovviamente la definizione dell'area di un triangolo in termini di base e altezza. L'indipendenza dalla scelta della base richiede la teoria della similitudine (che però in Euclide è sviluppata usando implicitamente l'esistenza dell'area). Si dimostra poi l'indipendenza dell'area di un poligono dalla decomposizione in triangoli.

Avendo la misura di area, si prova poi che due poligoni sono equicomplementabili (cioè hanno stessa area nel senso di Euclide) se e solo se hanno la stessa misura di area.

0.7 Aritmetizzazione

In seguito alla scoperta pitagorica delle grandezze incommensurabili (cioè dei numeri irrazionali) e alla successiva crisi dei fondamenti, i Greci evitarono di parlare di algebra direttamente, ed usarono invece formulazioni geometriche per i loro risultati. Ad esempio, nei libri II, VII, VIII e IX degli *Elementi* Euclide rappresenta i numeri come segmenti, l'addizione di due numeri come un segmento che si ottiene dalla estensione di un segmento corrispondente al primo numero mediante un segmento corrispondente al secondo, il prodotto di due numeri come l'area di un rettangolo avente per lati i segmenti corrispondenti ai due numeri, e così via. In particolare, l'algebra è subordinata alla geometria, anche nel linguaggio.

La geografia e l'astronomia resero necessario il processo inverso, ed a partire da Ipparco (150 D.C.) si cominciarono ad usare *coordinate* per descrivere curve date, ma soltanto rispetto ad un sistema di coordinate scelto di volta in volta, in base alla curva. Il primo a scegliere un *sistema di coordinate* fisso fu Oresmo (1323–1382), che era ancora talmente legato all'uso

[6] La scelta di Euclide della equicomplementabilità invece della equicomponibilità è giustificata: come Hilbert ha provato nel suo libro, l'uso della seconda richiede l'assioma di Archimede.

Inoltre, il trattamento dell'area di poligoni nel piano mediante equicomplementabilità è un caso singolare, che non si estende al trattamento nè dell'area di poligoni nello spazio, nè del volume di poliedri.

geografico da chiamare le coordinate 'longitudine' e 'latitudine'.

L'introduzione di una notazione algebrica soddisfacente (in cui lettere venivano usate per indicare variabili) permise a Pierre de Fermat (1601–1665) nel 1629 ed a René Descartes (1596–1650) nel 1637 di sviluppare la *geometria analitica*. La loro osservazione cruciale fu che, mettendo in corrispondenza enti geometrici (come i punti del piano o dello spazio) con numeri, si otteneva anche una corrispondenza indotta fra le proprietà di tali enti e proprietá numeriche. Ad esempio, essi scoprirono che le equazioni di primo e secondo grado descrivono, rispettivamente, rette e coniche.

La scoperta della geometria analitica ebbe un indubbio valore tecnico, perchè introdusse (e questo fu uno degli scopi dichiarati di Descartes) una *metodologia* nello studio della geometria, che mancava nello sviluppo greco. Fermat e Descartes si accapigliarono furiosamente per vari anni per contendersene la priorità: in ciò essi anticiparono la più famosa (ma non meno penosa) rissa fra Leibniz e Newton sulla scoperta dell'analisi. L'ironia della faccenda sta nel fatto che nè l'uno nè l'altro furono in realtà responsabili di quello che viene oggi visto come il merito della geometria analitica: di aver cioè spostato il predominio nella matematica dalla geometria all'algebra. Entrambi videro l'algebra soltanto come uno strumento per risolvere problemi di costruzioni geometriche, facendo cioè dell'algebra un uso *per* la geometria, e non *in sostituzione di* essa.[7]

Fermat lavorò esplicitamente nella tradizione greca, considerando il suo lavoro come una *riformulazione* di quello di Apollonio (262–190 A.C.). Descartes pose precisi limiti all'uso dell'algebra nella geometria: non considerò come curve legittime quelle trascendenti, limitandosi a quelle algebriche (definite da un'equazione); e spesso risolse i suoi sistemi di equazioni geometricamente, invece che analiticamente (usando le equazioni solo come mezzo per leggervi più facilmente proprietà geometriche).

Tale atteggiamento di sottomissione dell'algebra alla geometria era ancora presente in Isaac Newton (1642–1727): 'le due scienze non devono essere confuse; le nuove generazioni, confondendole, hanno perso la semplice eleganza geometrica'. Egli riteneva l'algebra inutile per lo studio delle sezioni

[7] Il nome 'geometria analitica' riflette tale tendenza iniziale, sottolineando il fatto che l'algebra viene usata come strumento di analisi per la geometria. Infatti, a partire da allora si incominciò a chiamare 'analisi' l'algebra, ed i due termini divennero sinonimi. Quando l'analisi nacque, la si vide come un'estensione dell'algebra per il trattamento degli infinitesimi, e Leonhard Euler (1707–1783) introdusse appunto per essa il nome 'analisi infinitesimale'. Solo alla fine dell'800 l'aggettivo fu lasciato cadere, e si cominciò a chiamare l'analisi 'analisi'.

coniche, e trattò le orbite dei pianeti nei *Principia* alla maniera dei Greci (e non in modo algebrico!). Soltanto per lo studio delle cubiche, che egli classificò nel 1695, Newton usò la geometria analitica.

Il cambiamento di rotta fu opera di John Wallis (1616–1703), che nel 1657 diede un trattamento algebrico dei Libri II e V di Euclide, e del trattato sulle sezioni coniche di Apollonio (egli introdusse anche la nozione di coordinate negative). Ma si dovette aspettare il 1899 (!) perchè si ottenesse una effettiva riduzione della geometria all'algebra; questa fu fatta da David Hilbert (1862–1943) nel suo libro *Fondamenti della Geometria*.

Hilbert definì un modello algebrico della geometria euclidea, nel modo oggi usuale: un punto del piano è una coppia di numeri reali, una retta è l'insieme delle soluzioni di un'equazione di primo grado, la distanza fra due punti è definita mediante il Teorema di Pitagora, e la congruenza mediante il concetto di isometria (trasformazione lineare che preserva le distanze). L'ultimo fatto non è banale, perchè si deve provare che una isometria preserva non solo le distanze, ma anche gli angoli.

0.8 Kant

Immanuel Kant (1724–1804) ha usato la geometria euclidea come uno dei fondamenti della sua filosofia nella *Critica della Ragion Pura* e nei *Prolegomeni ad ogni futura metafisica*: essa costituisce la forma (o, in termini kuhniani, il paradigma) della percezione sensoriale per gli oggetti esterni (così come il tempo costituisce la forma della percezione interna).

L'idea di Kant è che lo spazio non sia (come per Platone) un'idealizzazione dell'esperienza sensoriale, nè tanto meno (come per Newton) una qualità del mondo esterno, bensì un *a priori* che fa parte di ciò che significa essere 'umani', e che noi usiamo per organizzare le nostre percezioni sensoriali. Noi percepiamo il mondo come euclideo non perchè esso così sia (per Kant il problema di come la realtà sia veramente non ha alcun senso, visto che possiamo soltanto sapere come essa si presenta *a noi*), ma perchè questo fa parte del nostro modo di essere: 'il concetto di spazio non ha origine empirica, ma è un'inevitabile necessità del pensiero'.

In particolare, nè la possibilità matematica di geometrie non euclidee, nè la verifica sperimentale della non euclideicità dello spazio fisico possono confutare la tesi di Kant, poichè esse non si riferiscono al nostro modo di percepire il mondo esterno. Soltanto un'analisi della natura della percezione potrebbe produrre una tale confutazione.

Kant ha espresso chiaramente il fatto che esseri diversi da noi potrebbero (ed anzi, per la sua definizione di che cosa significhi essere 'umani', dovrebbero) organizzare il loro modo di interagire con e conoscere il mondo esterno in modo diverso dal nostro. In particolare, le geometrie non euclidee ci presentano una possibile alternativa alla forma delle percezioni di esseri diversi da noi.[8]

0.9 Purezza di Metodi

Dalle definizioni date negli *Elementi*, è chiaro che Euclide considera soltanto segmenti (o rette potenzialmente, ma non attualmente, infinite): le *estremità* delle rette sono punti (definizione 2), e rette parallele sono quelle che, comunque *estese* in entrambe le direzioni, non si incontrano (definizione 23). Come sempre, questo è in accordo con Aristotele: 'i matematici non hanno bisogno dell'infinito e non lo usano: essi postulano soltanto il fatto che un segmento si possa estendere a piacere' (*Fisica* III 7, 207b 29–30).

Da questo punto di vista il postulato delle parallele presenta un problema, perchè parla proprio di un comportamento (globale) all'infinito. Ciò risulta chiaro nella formulazione detta di John Playfair (1748–1819): per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data non contenente il punto. Ma fu notato già da Proclo (410–485 D.C.) anche per la formulazione originale di Euclide: date due rette tagliate da una trasversale, se la somma degli angoli interni corrispondenti da un lato della trasversale è minore di due retti, le due rette si intersecano da quel lato della trasversale. Il commento di Proclo fu appunto che due rette in tali condizioni si avvicinano certo indefinitamente, ma potrebbero anche essere asintotiche.

A causa di questa sua peculiarità, ci furono nei secoli molti tentativi di dedurre il postulato delle parallele dai rimanenti quattro, tentativi tutti inficiati da un uso implicito di una forma equivalente del postulato delle parallele. Il primo di essi fu fatto da Tolomeo (150 D.C.), che assunse implicitamente il postulato nella versione di Playfair.

Una innovazione che segnò una svolta nella storia delle 'dimostrazioni' del postulato delle parallele fu introdotta da Wallis, e consistette nel rendere esplicito l'uso di una forma equivalente del postulato delle parallele. Invece di cercare di provare il postulato delle parallele dai rimanenti postulati (e dalle loro conseguenze), nel 1663 Wallis ne provò (usando soltanto i rimanenti postulati) l'equivalenza logica con un teorema della geometria

[8]Esistono in realtà degli studi che intendono dimostrare che lo spazio visivo umano è effettivamente iperbolico, e non euclideo.

euclidea. Precisamente, il *teorema dei triangoli simili*: su un segmento dato si può costruire un triangolo simile ad uno dato.[9]

Poichè la dimostrazione del teorema dei triangoli simili usa il postulato delle parallele, l'argomento di Wallis non è un progresso dal punto di vista della dimostrazione del postulato stesso a partire dai rimanenti postulati. Ma essa provò che anche il teorema dei triangoli simili aveva lo stesso status del postulato delle parallele, e fu il primo passo verso la classificazione di quali risultati richiedono un uso essenziale di tale postulato, e sono dunque caratteristici della geometria euclidea. La dimostrazione di indipendenza del postulato delle parallele mostrò che tali risultati sono indipendenti essi stessi. Fra essi:

- la somma degli angoli di un triangolo è costante
- esiste un triangolo la cui somma degli angoli è 180°
- esistono triangoli simili non congruenti
- esistono triangoli di area arbitrariamente grande
- il Teorema di Pitagora
- esistono linee equidistanti una dall'altra
- esistono rettangoli (quadrilateri con quattro angoli retti)
- per tre punti passa un cerchio.

L'idea di Wallis si può riassumere dicendo che egli si preoccupò di vedere non se gli assiomi fossero *sufficienti* per dimostrare certi risultati (il che si era sempre fatto nella matematica), ma se essi fossero invece *necessari* per dimostrare quei risultati.[10] In una parola, ci fu uno spostamento dal provare teoremi dagli assiomi al provare assiomi dai teoremi.

Hilbert fece di tale idea il motivo centrale del suo libro, e ne notò l'intima connessione con l'ideale della *purezza di metodi*. Questa consiste appunto nel non usare, nella dimostrazione di un risultato, metodi estranei all'enunciato del risultato stesso (ad esempio, metodi non algebrici nella dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra).

[9] Wallis propose di accettare tale enunciato come postulato, per analogia con il Postulato 3 di Euclide: su un segmento dato si può costruire un cerchio. L'enunciato esprime l'analoga proprietà per i triangoli, ed ha il vantaggio di essere locale come questo, a differenza del Postulato 5.

[10] Tale procedimento è oggi commercializzato, con grande pubblicità, sotto l'etichetta di *Reverse Mathematics*, ed è uno degli esempi di 'novità' a cui si alludeva nell'introduzione.

0.10 Indipendenza e Consistenza Relativa

Il sospetto dell'indipendenza del postulato delle parallele crebbe con lo sviluppo dei risultati precedenti, da parte di Adrien Marie Legendre (1752–1833), Gerolamo Saccheri (1667–1733), Johann Heinrich Lambert (1728–1777), Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Nikolai Lobachevsky (1792–1856) e Jànos Bolyai (1802–1860). Essi svilupparono a fondo le conseguenze della negazione del postulato delle parallele (nella forma: esistono una retta ed un punto non su di essa tali che per il punto passano almeno due parallele alla retta data). Equivalentemente, anche se non a prima vista, si può usare il più forte *assioma iperbolico*: per un punto passano almeno due parallele ad una retta data non contenente il punto. Esso è conseguenza dell'omogeneità del piano, che fa sì che ciò che vale in una parte valga anche in ogni altra parte.

Lo scopo originario di tali ricerche era quello di sviluppare tali conseguenze fino a trovare una contraddizione con teoremi della *geometria neutrale* (basata soltanto sui primi quattro postulati di Euclide), e dimostrare così il postulato delle parallele. Tali autori ottennero una geometria alternativa detta *iperbolica*, senza però riuscire ad ottenere una contraddizione.[11]

I risultati successivi mostrarono che non solo non si era trovata una contraddizione nella geometria iperbolica, ma che non era possibile trovarla: tale geometria è *consistente*. Per fare ciò, si costruì un modello geometrico in cui i primi quattro postulati di Euclide e l'assioma iperbolico sono soddisfatti.[12] La strada per giungere a tale risultato fu piuttosto lunga.

Dapprima Gauss definì, nel 1827, il concetto di curvatura di una superficie dello spazio euclideo.

La *curvatura di una curva piana* $\mathcal{C}$ in un punto P (definita da Newton nel 1671 e da Huygens nel 1673) si ottiene considerando $\frac{1}{r}$, dove r è il raggio del cerchio (osculatore) ottenuto prendendo il limite dei cerchi passanti per P_1, P, e P_2 (dove

[11] Storicamente, la posizione dei vari autori fu differenziata: Legendre e Saccheri credettero di aver effettivamente dimostrato il postulato; Lambert si accorse di aver sviluppato una nuova geometria, e di non aver raggiunto nessuna contraddizione; Gauss capì che la geometria iperbolica poteva essere, in via di principio, quella del mondo fisico, ed effettuò addirittura tentativi di verifiche geografiche; Lobachevsky e Bolyai provarono che la geometria euclidea era un caso limite della nuova geometria.

[12] Lambert, Lobachevsky e Bolyai avevano sviluppato la geometria iperbolica in termini di *trigonometria iperbolica*, e si accorsero che questa era la trigonometria di una sfera di raggio immaginario. Essi (soprattutto Bolyai) videro tali risultati come una dimostrazione di 'plausibilità' della nuova geometria, ma la comunità matematica non fu convinta fino all'avvento delle vere dimostrazioni di consistenza.

P_1 e P_2 sono due punti su $\mathcal{C}$ da parti opposte di P), al tendere di P_1 e P_2 a P. La curvatura ha un segno che dice da quale parte della curva il cerchio osculatore si trova.

La *curvatura gaussiana di una superficie* $\mathcal{S}$ è definita nel modo seguente: dato un punto P su $\mathcal{S}$, si considera il piano p tangente ad $\mathcal{S}$ in P, e la retta r perpendicolare a p e passante per P; si considerano le curvature di tutte le curve $\mathcal{C}$ ottenute per intersezione di $\mathcal{S}$ con un piano passante per r, e si moltiplicano i valori minimo e massimo di tali curvature.

Gauss si accorse poi che il concetto di curvatura è intrinseco, nel senso che dipende soltanto da misure che si possono effettuare sulla superficie, e non dal modo in cui la superficie è immersa nello spazio.

Se una superficie è definita mediante equazioni parametriche

$$x = f(u, v) \qquad y = g(u, v) \qquad z = h(u, v),$$

la metrica (che definisce la distanza)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

diventa

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2,$$

dove i coefficienti g_{ij} sono funzioni di u e v.

Gauss trovò che la curvatura della superficie si può esprimere mediante una formula differenziale nei soli coefficienti g_{ij}, e dunque soltanto in funzione dei parametri u e v.

Gauss provò poi un risultato che persino lui, ben noto per la sua esigenza, chiamò *theorema egregium*: due superficie isometriche (cioè in corrispondenza mediante una biezione che conserva le distanze) devono avere la stessa curvatura. In particolare, avere curvatura costante è condizione necessaria perchè una superficie ammetta moto rigido di figure (cioè, perchè la superficie abbia il maggior numero possibile di isometrie). Ferdinand Minding (1806–1885) provò nel 1839 che tale condizione è anche sufficiente, e dunque le superfici a curvatura gaussiana costante sono esattamente quelle che permettono moto rigido di figure.

Poichè la geometria euclidea può appunto essere vista come lo studio delle proprietà invarianti rispetto a moto rigido, le superfici a curvatura gaussiana costante diventano modelli di potenziali geometrie. In particolare, le rette di tali geometrie sono le *geodetiche*, cioè le linee di minima distanza (sulla superficie).

Nello spazio il piano e il cilindro hanno curvatura gaussiana nulla, e la sfera ha curvatura costante positiva.[13] Gauss trovò un esempio (non l'unico possibile) di superficie a curvatura costante negativa: la *pseudosfera*. Essa era stata definita da Huygens nel 1693, ruotando attorno al suo asintoto una curva detta *trattrice* (definita da Newton nel 1676, mediante la proprietà che in ogni punto la tangente ha distanza costante d da un asintoto).[14]

Bernard Riemann (1826–1866) estese, nel 1854, il concetto di curvatura gaussiana a superfici che non sono necessariamente immerse nello spazio euclideo.

Riemann ribaltò l'approccio di Gauss: invece di partire da una superficie nello spazio definita mediante equazioni parametriche, e *dedurre* l'espressione dei coefficienti g_{ij} della metrica, egli *definì* direttamente una superficie mediante la metrica

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2,$$

dove i coefficienti g_{ij} sono funzioni arbitrarie di u e v, soggette soltanto alla condizione che $ds^2 \geq 0$.

La curvatura riemanniana della superficie si ottiene usando formalmente la stessa espressione differenziale che definisce intrinsecamente la curvatura gaussiana (in funzione dei coefficienti g_{ij}).

Riemann notò che esistono tre distinte geometrie (dove le rette sono le geodetiche) per superfici riemanniane a curvatura costante: esse sono caratterizzate dal fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo sia maggiore, uguale o minore di 180° (rispettivamente nei casi in cui la curvatura è positiva, nulla o negativa). In particolare, come fu notato anche da Eugenio Beltrami (1835–1900) nel 1866, la geometria di una superficie riemanniana a curvatura costante negativa è iperbolica, e la pseudosfera rappresenta dunque un modello di una parte del piano iperbolico nello spazio euclideo.

La pseudosfera rappresenta soltanto una porzione di piano iperbolico perchè essa ha una singolarità nel punto a cui tende l'asintoto, mentre il piano iperbolico

[13] Nel piano, le uniche curve a curvatura costante sono la retta e il cerchio.

[14] Il nome 'trattrice' deriva dal fatto, notato da Huygens nel 1693, che questa curva si ottiene camminando lungo l'asintoto e traendo un peso mediante una corda di lunghezza d.

non ha nessuna singolarità.[15] La porzione di piano iperbolico rappresentato è detta *settore orociclico* (determinato da un arco di *orociclo*, cioè un cerchio avente per centro un punto ideale, ed i due diametri ad esso corrispondenti).

Hilbert ha dimostrato (in una delle appendici al suo libro *Fondamenti della Geometria*) che non esistono superfici (regolari analitiche) nello spazio euclideo che rappresentino isometricamente tutto il piano iperbolico. Per definire l'intero piano iperbolico è dunque necessario considerare una superficie riemanniana completa a curvatura negativa costante, ma così facendo non si ha più un modello nello spazio euclideo.

Tali sviluppi vennero portati a conclusione da Beltrami, che trovò nel 1868 un modello del piano iperbolico nel piano euclideo, e ridusse dunque la consistenza della geometria iperbolica piana a quella della geometria euclidea piana. Egli scoprì nel 1865 che le superfici dello spazio euclideo che si possono proiettare sul piano euclideo in modo che le proiezioni delle geodetiche diventino rettilinee sono esattamente quelle a curvatura costante. Mentre per curvatura positiva una parte della superficie è proiettata su tutto il piano (ad esempio, una semisfera è proiettata, mediante proiezione centrale, su tutto il piano tangente), per curvatura negativa si ha l'opposto: tutta la superficie è proiettata su una parte limitata del piano, dunque all'interno di un cerchio (ad esempio, la pseudosfera su un orociclo). Nel 1868 Beltrami capì che estendere la distanza indotta dalla pseudosfera (sul settore orociclico) a tutto il cerchio lo rendeva un modello dell'intero piano iperbolico, e non più soltanto di una parte di esso. Poichè le proiezioni delle geodetiche erano rettilinee, le rette del modello erano semplicemente corde del cerchio.

Il modello interpreta i *punti* iperbolici come punti interni ad un cerchio euclideo (detto assoluto); i punti della circonferenza si chiamano 'ideali', e corrispondono a punti all'infinito; i punti fuori del cerchio si chiamano 'ultraideali'. Per l'interpretazione delle *rette* iperboliche, si usano intersezioni di rette euclidee con il cerchio assoluto.

Il problema è quello di definire la nozione di *distanza* iperbolica: questo è dovuto al risultato già citato di Hilbert, che non permette modelli isometrici del piano iperbolico nello spazio (e, a maggior ragione, nel piano) euclideo. Beltrami usa il procedimento descritto per ottenere l'espressione della distanza.

Una nuova definizione del modello di Beltrami fu data da Felix Klein

[15] In altre parole, nel primo caso esistono curve piane che non si possono contrarre ad un punto, ma nel secondo caso no.

(1849–1925), che si accorse nel 1871 che era possibile evitare l'apparato della geometria differenziale, ed esprimere la distanza in termini di concetti di geometria proiettiva: oggi si parla dunque di *modello di Beltrami-Klein*. L'osservazione principale di Klein fu di notare che le isometrie del piano iperbolico mandano rette iperboliche in rette iperboliche, e dunque corde del cerchio in corde del cerchio. Esse devono allora essere trasformazioni proiettive del cerchio, e già Arthur Cayley (1821–1895) aveva notato nel 1859 che è possibile definire la distanza in termini puramente proiettivi.[16]

L'idea di Cayley è che le proprietà metriche di una figura si ottengono considerando la sua relazione con l'assoluto proiettivo. La distanza fra due punti A e B nel modello di Beltrami-Klein si ottiene dunque considerando i punti ideali A_0 e B_0 della retta iperbolica passante per A e B, e inducendo sulla retta A_0B_0 una biezione canonica con i reali. Più precisamente, prendendo (un mezzo del valore assoluto del logaritmo[17] de) il *rapporto incrociato*

$$\frac{AB_0 \cdot BA_0}{AA_0 \cdot BB_0},$$

dove XY è la distanza euclidea fra X ed Y.

La *misura angolare* si ottiene in modo analogo, considerando il rapporto incrociato fra le rette che definiscono l'angolo e le rette ideali ad esse coniugate.

I fattori essenziali di un modello iperbolico sono ovviamente le rette, le distanze e le misure angolari. Un modello della geometria iperbolica nel piano euclideo deve ridefinire almeno uno di tali fattori, e necessariamente la distanza (a causa del risultato di Hilbert). Il modello di Beltrami-Klein lascia invariate soltanto le rette. Beltrami ottenne anche un modello *conforme*, che lascia cioè invariati gli angoli. Esso si ottiene proiettando prima il modello di Beltrami-Klein sull'emisfero meridionale di una sfera (tangente nell'origine al piano euclideo in cui il modello di Beltrami-Klein sta, e con lo stesso raggio del cerchio assoluto), e poi proiettando stereograficamente dal polo nord tale emisfero sul piano euclideo.[18] Tale modello fu studiato nel 1882 da Henri Poincaré (1854–1912), e va oggi sotto il nome di *modello*

[16]Questa osservazione fu il punto partenza necessario a vedere la geometria euclidea come una sottogeometria della geometria proiettiva. Lo sviluppo di tali punti di vista portò al *Programma di Erlanger*, annunciato da Klein nel 1873, e la sua realizzazione mostrò come le geometrie euclidea, affine, iperbolica ed ellittica sono tutte sottogeometrie della geometria proiettiva.

[17]Il logaritmo interviene per ottenere l'additività della distanza.

[18]In particolare, i due modelli sono isomorfi.

di Poincaré.

I punti sono definiti come nel modello di Beltrami-Klein, ma le rette sono ora segmenti di cerchi euclidei che intersecano perpendicolarmente il cerchio assoluto. La distanza è definita in modo analogo a quella del modello di Beltrami-Klein, a meno del fattore $\frac{1}{2}$. La misura angolare è quella euclidea.

Nella direzione opposta, Watcher (1792–1817) aveva dimostrato già nel 1816 che l'*orosfera* (una sfera dello spazio iperbolico avente per centro un punto ideale) è un modello (in questo caso, isometrico) del piano euclideo, così fornendo una dimostrazione di consistenza relativa della geometria euclidea piana nella geometria iperbolica solida.

In particolare, questi risultati mostrano che non è possibile scegliere fra geometria euclidea ed iperbolica sulla base della sola consistenza logica: se una è consistente, anche l'altra lo è.

0.11 Insolubilità

La soluzione dei problemi di costruibilità con riga e compasso descritti nella Sezione 0.4 riservò una sorpresa: essa provò che tali problemi erano insolubili con gli strumenti dati.[19] Non si trattò quindi di esibire una particolare costruzione, come sarebbe stato il caso nell'eventualità di una soluzione positiva, ma di:

- caratterizzare in qualche modo i punti ottenibili mediante riga e compasso a partire da punti dati
- provare che i punti che forniscono le soluzioni ai problemi citati non appartengono alla classe così determinata.

La prima parte usò in modo essenziale i metodi algebrici resi possibili dall'aritmetizzazione. Si trovò che, dato un campo $\mathcal{C}$, un elemento è costruibile con riga e un singolo uso del compasso se e solo se esso sta nel campo

$$\{a + b \cdot \sqrt{c} : a, b \in \mathcal{C}\},$$

dove c è un elemento fissato di $\mathcal{C}$.

[19] Storicamente, la prima dimostrazione di insolubilità con mezzi dati fu quella di Paolo Ruffini (1765–1822) nel 1799 e Niels Abel (1802–1829) nel 1824, sull'impossibilità di risolvere equazioni algebriche di quinto grado mediante radicali.

La radice quadrata appare perchè la funzione del compasso è quella di creare un cerchio, che può intersecare una retta o un altro cerchio. Un sistema di equazioni descriventi un cerchio ed una retta (cioè un'equazione quadratica ed una lineare) porta alla soluzione di un'equazione di secondo grado, e così un sistema di equazioni descriventi due cerchi (sottraendo le due equazioni, si ottiene un'equazione di primo grado, e ci si riduce al caso precedente).

Come conseguenza, se il campo di partenza è ad esempio quello dei numeri razionali (generato da un segmento), i numeri costruibili con riga e compasso (cioè mediante iterazione di un singolo uso del compasso) sono tutti algebrici (perché soluzioni, dopo n iterazioni, di equazioni di grado 2^n a coefficienti razionali). Dunque l'impossibilità della quadratura del cerchio si riduce a dimostrare che π non è algebrico, e ciò fu provato da Ferdinand Lindemann (1852–1939) nel 1882.

Per gli altri due problemi[20] la soluzione negativa era stata trovata, più facilmente, da Pierre Wantzel (1814–1848) nel 1837.

Essi si riducono alle soluzioni di equazioni cubiche a coefficienti razionali che non ammettono soluzioni razionali, e si prova (per assurdo sul più piccolo n tale che una soluzione sia ottenibile con n singoli usi del compasso) che tali equazioni non possono avere soluzioni costruibili con riga e compasso (a partire dai soli numeri razionali).

0.12 Formalizzazione

La scoperta della consistenza dell'assioma iperbolico portò anzitutto alla necessità di abbandonare la richiesta di usare assiomi che (benchè non dimostrati) siano 'veri'. Il nuovo concetto di *sistema formale* si basa su nozioni primitive (indefinite) e assiomi su di esse (non dimostrati e arbitrari): questi ultimi, come notò Joseph-Diez Gergonne (1771–1859) nel 1818, definiscono tali nozioni implicitamente (anche se non necessariamente in modo univoco).

Inoltre, la peculiarità dei risultati della geometria iperbolica rispetto a quelli della geometria euclidea portarono alla necessità di esplicitare le assunzioni implicite in Euclide, che usava piuttosto liberamente concetti e assiomi non esplicitamente enunciati, e faceva spesso riferimento alle figure. Come al solito, il Libro I fornisce vari esempi:

[20] Analogamente per quello citato nella nota 5.

- Proposizioni 1 e 2, e varie altre volte in seguito (continuità: intersezione di due cerchi, e di un cerchio ed una retta)
- Proposizione 4 e 8 (congruenza: sovrapposizione mediante moto)
- Proposizione 16 (rette infinite o illimitate)
- Proposizione 7 e 21 (ordine: separazione del piano).

Tali mancanze furono notate rispettivamente da: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716); Arthur Schopenhauer (1788–1861) nel 1844; Riemann nel 1854; Gauss nel 1832 e Moritz Pasch (1843–1930) nel 1882. Per ovviare ad esse si sono proposte varie assiomatizzazioni più rigorose, di cui due sono oggi classiche.

La prima, vicina allo spirito di Euclide, è stata proposta da Pasch nel 1882 e perfezionata da Hilbert nei *Fondamenti della Geometria*.[21] Essa divide gli assiomi in cinque gruppi:

1. incidenza (in particolare, per due punti passa una ed una sola retta)
2. ordine (in particolare, l'assioma di Pasch: una retta passante per un vertice di un triangolo e per un punto interno ad esso, interseca il lato opposto al vertice; equivalentemente, gli assiomi di separazione: un punto divide una linea in due parti, ed una linea divide il piano in due parti)
3. congruenza (in particolare, il criterio di uguaglianza SAS per triangoli aventi due lati e l'angolo compreso uguali; equivalentemente, il criterio di uguaglianza SSS per triangoli aventi tre lati uguali[22])
4. continuità (gli assiomi di Archimede e di Dedekind)
5. parallelismo (l'assioma di Playfair).

Un vantaggio di questa formalizzazione è che, come ha mostrato Hilbert in un'appendice al suo libro, cambiando l'assioma delle parallele nella sua negazione, si ottiene una formalizzazione della geometria iperbolica.

In questo approccio la distanza fra due punti è *definita*: l'assioma di Archimede permette, per approssimazioni successive, di assegnare ad ogni

[21] Altre formalizzazioni della geometria euclidea, nello stesso spirito ma con altre nozioni primitive, erano state proposte da Giuseppe Peano (1858–1932), Mario Pieri (1860–1904), e Giuseppe Veronese (1854–1917).

[22] Tali assiomi sono cruciali per forzare l'omogeneità del piano.

punto su di una retta un numero reale; l'assioma di Dedekind, viceversa, permette di associare ad ogni numero reale un punto su di una retta data (fissate l'origine, l'unitá di misura ed il verso).[23] Analogamente per la misura angolare.

La seconda assiomatizzazione, dovuta a Birkoff, usa invece distanza ed angoli come concetti primitivi. Si postula l'esistenza di un sistema di coordinate su ogni retta (in biiezione con i reali), quando si fissino l'origine e il verso; e di un sistema di misura per angoli che sia additivo e suriettivo (su un intervallo di reali), quando si fissino una retta, un'origine ed un semipiano.

In questo caso è l'ordine che viene definito: dati due punti A e B, X si dice fra essi se la somma delle distanze AX e XB è uguale alla distanza AB. Si possono poi definire i segmenti nel modo solito, ed alcune proprietà di congruenza derivano da proprietà corrispondenti dei numeri reali (tramite coordinate).

Gli altri gruppi di assiomi si riducono ai seguenti:

- gli assiomi di incidenza
- l'assioma di Pasch per l'ordine
- il criterio di uguaglianza SAS per amalgamare i vari sistemi di misura di distanze e di angoli (equivalentemente: l'esistenza di riflessioni attorno ad ogni retta, cioè biiezioni che preservano rette, distanze ed angoli, e scambiano fra loro i semipiani determinati dalla retta data[24]).

0.13 Metamatematica

Nel suo libro, Hilbert non soltanto introdusse un sistema di assiomi che permise di ricuperare Euclide rigorosamente, ma compì un salto di qualità:

[23] Se si vuole soltanto definire un'algebra astratta di segmenti, compreso un sistema di coordinate e dunque la geometria analitica, senza però assegnare numeri reali alle distanze, gli assiomi di continuità non servono (una forma debole di continuità viene fornita dall'assioma di Pasch). Si usa invece la seguente forma del Teorema di Pappo (300 D.C.): le intersezioni di lati opposti di un esagono con i vertici su due rette perpendicolari sono collineari. Tale teorema è conseguenza dei rimanenti assiomi, senza continuità, e risulta essere equivalente alla commutatività della moltiplicazione nell'algebra di segmenti.

In modo analogo si può trattare la misura dell'area, assegnandole segmenti invece di numeri reali. In questo caso il Teorema di Pappo risulta essere equivalente alla congiunzione delle Proposizioni 37 e 39 di Euclide (due triangoli con la stessa base hanno la stessa area se e solo se hanno la stessa altezza).

[24] Questo approccio ripristina il trattamento di Euclide, che provò SAS (nella Proposizione 4) mediante isometrie.

il sistema di assiomi divenne un oggetto di studio a sè stante, e l'interesse si spostò dai teoremi *del* sistema ai teoremi *sul* sistema.

Così facendo, Hilbert pose sulla carta tutta una serie di problemi per sistemi assiomatici che sarebbero diventati classici nella metamatematica posteriore:

- *indipendenza*, esemplificata dalla storia del postulato delle parallele
- *consistenza* (esiste un modello), corrispondente al passaggio dalla considerazione dell'Essere-come-Essere di Aristotele all'Essere-come-Possibilità di Kant, e necessaria in seguito all'abbandono della richiesta di 'verità' degli assiomi (che forniva automaticamente un modello privilegiato, e dunque la consistenza)
- *completezza* (ogni modello soddisfa le stesse proprietà), per giustificare ragionamenti sulle figure come quelli di Euclide: ciò che vale in un modello, vale in tutti i modelli
- *categoricità* (c'è un solo modello di una data cardinalità, a meno di isomorfismi), per assicurare che gli enti (non definiti esplicitamente) di cui si parla siano almeno definiti implicitamente (a meno di isomorfismo).

Le ultime due proprietà furono introdotte, rispettivamente, da Veblen nel 1904, e da Edward Huntington (1874–1952) nel 1902.

Tali problemi hanno generato il bisogno di una gran quantità di *modelli*: un modello di tutti gli assiomi ne dimostra la consistenza (relativa), un modello di tutti gli assiomi meno uno dimostra l'indipendenza di quest'ultimo dai rimanenti, un isomorfismo tra due modelli qualunque (della stessa cardinalità) dimostra la categoricità, e dunque anche la completezza[25] (una teoria può però essere completa senza essere categorica). In particolare, si scoprirono varie geometrie, ad esempio geometrie *finite*, *non-archimedee*, *non-desarguesiane*,[26] eccetera.

[25]Parliamo qui delle cosiddette teorie del prim'ordine (con quantificatori soltanto su elementi). Per le teorie di ordine superiore (ad esempio, con quantificatori su insiemi) tale relazione tra categoricità e completezza non è più vera.

[26]Hilbert ha dimostrato nel suo libro che il Teorema di Desargues (due triangoli sono in prospettiva da un punto se e solo se sono in prospettiva da una linea) è equivalente al fatto che la geometria piana considerata si possa considerare come parte di una geometria spaziale.

Per quanto riguarda le geometrie euclidea ed iperbolica, i sistemi assiomatici di Hilbert si rivelarono (previa introduzione di coordinate, cartesiane nel primo caso e di Beltrami nel secondo) *categorici*,[27] e dunque ammettenti essenzialmente un solo modello. In particolare, l'isomorfismo dei modelli di Beltrami-Klein e di Poincaré risultò essere non una fortunata coincidenza, ma una necessità intrinseca della geometria iperbolica.[28]

Per quanto riguarda la *consistenza*, le geometrie euclidea ed iperbolica sono, come abbiamo visto, equiconsistenti. Il modello analitico di Hilbert della geometria euclidea ridusse la consistenza della geometria a quella dell'analisi. Il problema della consistenza dell'analisi divenne noto come il *secondo problema di Hilbert*, ed è stato uno stimolo per le maggiori ricerche logiche di questo secolo: tentativi rivolti alla sua soluzione, almeno parziale (ad esempio, la consistenza dell'aritmetica) risultarono nel Programma di Hilbert, nei Teoremi di Gödel, nella Teoria della Dimostrazione di Gentzen, nell'indipendenza dell'Ipotesi del Continuo di Cohen, il λ-calcolo polimorfo di Girard.

Il libro di Hilbert si può dunque a ben diritto considerare, oltre che un punto di arrivo di uno sviluppo assiomatico della geometria, anche come un punto di partenza della moderna metamatematica.

[27] Il primo sistema di assiomi categorico per la geometria euclidea piana fu dato da Veblen nel 1904. Il sistema di Hilbert, che nella prima edizione del libro non conteneva l'assioma di Dedekind, divenne categorico dopo la introduzione di questo.

[28] In particolare, dati due modelli per la geometria euclidea e per quella iperbolica, una proprietà che valga in entrambi i modelli è dimostrabile senza l'assioma delle parallele, ed una proprietà che valga nel modello euclideo e fallisca in quello iperbolico è equivalente all'assioma delle parallele.