FILOSOFIE DELLA MATEMATICA

Piergiorgio Odifreddi

Gennaio 1993

Intendiamo la parola 'filosofia' in un senso popolare e non accademico: semplicemente, come sinonimo di 'riflessione'. In particolare, 'filosofia della matematica' non vorrà dire altro che *riflessione sulla matematica*. Ovviamente, una tale attività può essere soddisfacente solo per chi abbia interesse anzitutto per la matematica, e poi per la riflessione. Altrettanto ovviamente, tali interessi possono non esistere, soprattutto in congiunzione fra loro.

La riflessione su di un soggetto si può fare in almeno due distinti modi *verbali* (cioè parlandone): privilegiando la forma, o il contenuto. Ad essi corrispondono due modi di intendere la filosofia della matematica, entrambi marginali per il loro interesse intrinseco, ma popolari perchè di basso profilo matematico e (relativamente) alto profilo estetico.

Un terzo modo, non verbale, di riflessione sulla matematica consiste semplicemente nel fare e presentare la matematica stessa in un certo modo. È chiaro che questo approccio può essere praticato soltanto dai matematici: esso quindi interessa necessariamente meno il 'grande' pubblico da un lato ed i filosofi di professione dall'altro,[1] ma in un ultima analisi risulta essere l'unico approccio di interesse intrinseco.

I tre modi di riflessione sono brevemente descritti nelle tre sezioni seguenti.

1 Letteratura: da leggere

In modo manicheo, ciò che distingue la letteratura dalla filosofia accademica è la predominanza della sintassi (il *come* si dice) sulla semantica (il *cosa* si dice) nell'attività linguistica. In particolare, nella letteratura la forma prende il sopravvento sul contenuto, ed in casi estremi può diventare l'unico aspetto

[0] Testo di una conferenza al Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 4 Febbraio 1993.

[1] Alcuni filosofi che parlano di matematica sono come alcuni preti che predicano sulla sessualità: o l'hanno vissuta clandestinamente e interiorizzata colpevolmente, o l'hanno sentita raccontare dai peccatori in confessionale; in entrambi i casi, non ne conoscono gli aspetti sani e quotidiani.

sensibile. All'altro estremo, la grande letteratura è (secondo Pound[2]) 'linguaggio carico di significato al massimo grado'.

La matematica, per sua natura intrinseca, può svolgere una funzione di aggregazione del linguaggio su un contenuto di grande significato, e diventare quindi lo spunto per una riflessione che generi grande letteratura. Non è un caso che essa sia stata utilizzata per produrre appunto alcuni grandi libri, che ci forniscono gli esempi di filosofia della matematica col massimo contenuto letterario.

Poichè il linguaggio ha in tali esempi un ruolo primario, non si può far altro con questo tipo di filosofia della matematica che *leggerla* ed, eventualmente, goderla. Saggi sugli aspetti matematici di tali autori ed opere non possono dunque essere molto di più di un collage di citazioni, che ne isolino o classifichino alcuni aspetti.[3] Va da sè che si tratta qui di fornire *interpretazioni* di tali opere da un punto di vista matematico, e non *spiegazioni*: in altre parole, non si pretende di scoprire una necessità, ma di suggerire una possibilità.

In questa sede ci limitiamo a fornire un elenco di nomi e titoli, per orientamento (sottolineandone, comunque, l'alto livello nel panorama letterario). Un tale elenco non è altro che il riflesso di letture personali, e ne riflette la casualità.

L'autore più antico che proponiamo è **Lewis Carroll**, egli stesso matematico ed autore di libri di geometria: in *Alice nel paese delle meraviglie* e *Attraverso lo specchio* egli fa un uso esteso di paradossi ed idee matematiche, e l'edizione commentata da Martin Gardner è utile per raccapezzarvisi.

La massima profondità di riflessione matematica si trova forse nelle opere di **Robert Musil**: ne *I turbamenti del giovane Törless*, e nel monumentale *L'uomo senza qualità*, il cui protagonista è appunto un matematico.

Ad **Hermann Hesse** la matematica (da lui definita come 'il grande e duraturo merito del periodo culturale fra il Medio Evo e il tempo nostro') ha fornito l'ispirazione per *Il giuoco delle perle di vetro*, la sua opera più matura ed estesa.

L'opera di **Jorge Luis Borges** si può ben caratterizzare come una letteratura del paradosso. Egli subì il fascino di Zenone, lesse molti libri di Russell, e sfruttò magnificamente l'infinito e la logica per saggi e racconti sparsi in varie raccolte. In particolare: in *Discussione* e *Altre inquisizioni* i primi; e in *Finzioni*, *L'Aleph* e *Il libro di sabbia* i secondi.

Paul Valery ha interrotto la sua attività poetica per studiare (fra l'altro) matematica, e questa si affaccia infatti nella sua opera posteriore, in particolare nella sezione 'filosofia' (appunto) degli sterminati *Quaderni*.

Raymond Queneau aveva invece studiato matematica fin dall'inizio (come racconta nella sua autobiografia *Odile*). Egli ha scritto saggi su di essa (raccolti in *Cifre e segni*), e utilizzato il calcolo combinatorio per costruire *Centomila miliardi di poemi*.

---

[2]Ezra Pound, *L' del leggere*, Garzanti, 1974, p. 22.

[3]Così sono appunto i nostri *Scandali della ragione* e *Labirinti dello spirito* su Borges, e *La logica come salvezza dell'Occidente* su Hesse (autori citati poco oltre).

Alexander Solzhenitzin, prima di essere internato nei campi di concentramento stalinisti e di farne il centro di rotazione della sua opera letteraria, fu un insegnante di matematica. Le sue riflessioni su di essa si trovano ne *Il primo cerchio* e, in misura minore, in *Reparto cancro*.

Vogliamo concludere questa lista (che, sebbene inorganica, comprende autori di lingua inglese, tedesca, spagnola, francese e russa) esprimendo il disagio di non avervi potuto inserire nomi italiani. Conosciamo certo autori di formazione scientifica (da Salvatore Quasimodo a Carlo Emilio Gadda), così come opere letterarie di ispirazione scientifica (ad esempio *Le cosmicomiche* o *Ti con zero* di Italo Calvino), ma non opere di ispirazione più strettamente matematica (eccetto forse *Furor mathematicus* di Leonardo Sinisgalli).

2 Filosofia accademica: da raccontare

La distinzione manichea della precedente sezione, vista dal lato opposto, distingue la filosofia accademica dalla letteratura per la predominanza della semantica sulla sintassi, e il sopravvento del contenuto sulla forma.

Non sembra però che si possa qui rivoltare la caratterizzazione di Pound: si può infatti fare della grande filosofia anche usando un linguaggio indecente. L'esempio classico è forse Kant, che nella toccante introduzione alla *Critica della ragion pura* si scusa coi lettori della sua (peraltro evidente) inadeguatezza linguistica, e rimpiange pateticamente di non aver il tocco di Hume.

Esistono d'altra parte filosofi che sanno scrivere, e la cui opera appartiene alla letteratura, indipendentemente dal contenuto filosofico. Possiamo citare come esempi nel campo che ci interessa, agli estremi dello sviluppo storico, i *Dialoghi* di Platone e il *Trattato logico-filosofico* di Wittgenstein (un poema sul mondo ispirato al calcolo proposizionale, appartenente ad un genere iniziato col *De rerum natura* di Lucrezio, e temporaneamente concluso da *Piccola cosmogonia portatile* di Queneau).

A parte però tali eccezioni, la subalternità del linguaggio nella filosofia permette, e nei casi peggiori impone, di evitare una lettura diretta delle opere. È dunque possibile *raccontare* le filosofie senza snaturarle, ed il fatto che non ci sia l'obbligo di leggerle come nella letteratura o di praticarle come nella matematica, ha certamente contribuito alla loro (ancora viva) popolarità.

Per quanto ci riguarda più da vicino, la filosofia nel senso accademico è stata permeata di matematica dai suoi primordi.[4] Si devono distinguere qui due tendenze: in una la matematica è il punto di partenza, e su di essa si costruiscono filosofie che le sono intellettualmente posteriori; nell'altra la matematica è il

[4] Più in generale, di scienza. Basti citare le teorie di alcuni presocratici (Anassimene, Empedocle, Eraclito, Parmenide e Talete) sugli elementi fondamentali: terra, acqua, aria, e fuoco. Come ha notato Georg Kreisel, in termini moderni essi corrispondono semplicemente agli stati solido, liquido e gassoso degli elementi, e all'energia.

punto di arrivo, e la riflessione su di essa si basa su filosofie ad essa intellettualmente precedenti.

Tali tendenze sono brevemente descritte nelle due sottosezioni seguenti.

2.1 Dalla matematica alla filosofia

La matematica greca, basata non più sull'intuizione (a volte fallace) come nel caso della geometria egiziana o babilonese, ma sulla dimostrazione, divenne presto un modello di ragionamento, ma fece anche sorgere nuovi problemi di giustificazione, che stimolarono la nascita della filosofia della matematica in senso accademico.

Platone si interessò alla natura degli *oggetti* matematici, e cercò di spiegare che cosa fossero le figure di cui si trattava nella geometria. La sua soluzione al problema fu il nucleo di una nuova filosofia: le figure geometriche sono le *idealizzazioni* (o le forme[5]) degli oggetti fisici percepiti mediante le sensazioni. Poichè tali idealizzazioni (o *idee*) posseggono una perfezione che gli oggetti (così come vengono) percepiti non hanno, esse non solo esistono indipendentemente da questi e costituiscono un mondo parallelo a quello sensoriale, ma sono addirittura la 'vera' realtà, di cui il mondo sensoriale è soltanto una pallida immagine (un mondo di ombre percepite sulle pareti di una caverna). La geometria diviene dunque il modo attraverso cui noi veniamo a conoscenza del mondo delle idee, e come tale acquista un'importanza fondamentale: sulla porta dell'Accademia un motto ammoniva che non dovevano entrare coloro che la ignoravano.

Aristotele si interessò invece della natura del *metodo* matematico. Egli sistematizzò la logica come scienza del ragionamento, enunciando chiaramente che le sue leggi erano state sì formulate sul modello delle dimostrazioni matematiche (ad esempio, la legge di contraddizione sul modello delle dimostrazioni indirette), ma anche che essa doveva essere considerata indipendente dalla matematica, e a questa precedente.

Kant ha usato la geometria euclidea come uno dei fondamenti della sua filosofia, nella prima parte della *Critica della Ragion Pura*: essa costituisce la forma (o, in termini moderni, il paradigma) della percezione sensoriale per gli oggetti esterni (così come il tempo costituisce la forma della percezione interna). L'idea di Kant è che lo spazio non sia (come per Platone) un'idealizzazione dell'esperienza sensoriale, nè tanto meno (come per Newton) una qualità del mondo esterno, bensì un *a priori* che fa parte di ciò che significa essere 'umani', e che noi usiamo per organizzare le nostre percezioni sensoriali. Noi percepiamo il mondo come euclideo non perchè esso così sia (per Kant il problema di come la realtà sia veramente non ha alcun senso, visto che possiamo soltanto sapere come essa si presenta *a noi*), ma perchè questo fa parte del nostro modo di essere: 'il concetto di spazio non ha origine empirica, ma è un'inevitabile necessità del pensiero'.

[5]'Idea' deriva appunto da *eidos*: figura, forma.

Nella seconda parte della *Critica della Ragion Pura* Kant presenta un sistema che può oggi essere descritto brevemente come fondato su categorie ('concetti dell'intelletto') che sono semplicemente le nozioni primitive di una formulazione del calcolo dei predicati modale. Le idee trascendentali ('concetti della ragione') si ottengono mediante un passaggio al limite di alcune di tali categorie. Kant mostrò, mediante quattro antinomie, che le idee trascendentali sono contraddittorie, e ne dedusse la seguente conclusione: se si richiede completezza dalla ragione, permettendo la considerazione di idee 'al limite', si cade nell'inconsistenza. La conclusione di Kant si può riformulare dicendo che se la ragione vuole essere consistente, non può essere completa (nel senso di poter decidere ogni problema che essa si ponga).

Gli esempi fatti dimostrano come questo genere di filosofia sia stato caratterizzato da un forte contenuto matematico. Esso quindi non poteva non portare a risultati concreti nella matematica stessa. Per citare due esempi estremi, Euclide produsse gli *Elementi* sulla spinta delle necessità di rigore logico analizzate da Aristotele, mentre Gödel matematizzò sia il ragionamento che la conclusione di Kant, ed ottenne uno dei risultati più significativi della logica matematica (nella forma: se un sistema formale per l'aritmetica è consistente non può essere completo).

2.2 Dalla filosofia alla matematica

Questa tendenza fu una reazione temporanea alla progressiva introduzione di metodi astratti nella matematica, e si può considerare circoscritta temporalmente fra il 1879 e il 1931, date di pubblicazione rispettivamente del *Begriffschrift* di Frege e del lavoro sull'incompletezza di Gödel.

Essa si può caratterizzare come il prodotto di una riflessione pre-giudiziale (in senso letterale), in cui i fondamenti acquistano un ruolo fondamentale e vorrebbero precedere ed indirizzare, invece di seguire e analizzare, la pratica della matematica.

La generalità di tali approcci ha un indubbio fascino, che può far ricordare, a seconda dell'attitudine che si adotta verso di essi, le filosofie dei primordi da un lato, ed i fumetti (o la pop music) dall'altro. Le prime rispondono in modo ovvio alle domande ovvie (e quindi universali) che chiunque si pone non appena inizi a riflettere (come nel titolo di un quadro di Gauguin: 'da dove veniamo, chi siamo, dove andiamo?'). I secondi stuzzicano la curiosità letteraria (o musicale), richiedendo al massimo un minimo di alfabetismo.

Il fascino dell'estremismo intellettuale (malattia infantile della riflessione) si coniugò, nel cinquantennio in questione, alla personalità dei predicatori: fu così che le gesta e le diatribe di Frege, Russell, Wittgenstein, Hilbert e Brouwer finirono da un lato con l'attirare l'attenzione del pubblico, e dall'altro col respingere i matematici di professione.

Oggi, calmati i bollori, possiamo guardare ai progetti eroici della filosofia pre-giudiziale in modo più distaccato, e notare che è forse meglio ricordare i suoi esponenti per ciò che hanno fatto in altri campi: Frege e Wittgenstein nella filosofia del linguaggio, Hilbert e Brouwer nella matematica pura. Soltanto Russell rimane, benchè il più titolato mondanamente, tristemente ridimensionato.[6]

L'aspetto pre-giudiziale del tipo di riflessione di cui stiamo trattando è ben evidenziato dal fatto che essa si interessa non di aspetti specifici dell'attività matematica (definizioni, dimostrazioni e teoremi), bensì di generalità, di cui proponiamo brevemente alcuni esempi significativi.

Sistemi

Frege e **Russell** hanno cercato e proposto sistemi universali per l'intera matematica, basati sulla logica. Tali sistemi sono prodotti dell'atteggiamento pregiudiziale cui abbiamo accennato, ed il loro fato testimonia della pericolosità di tali imprese:

- Frege si scordò di considerare la possibilità di autoriferimento *di proprietà* esprimibili nel sistema, e Russell mostrò che ciò portava addirittura all'inconsistenza.

- Russell si scordò di considerare la possibilità di autoriferimento *del sistema* stesso, e Gödel mostrò che ciò portava all'incompletezza.

La proposta di fondare l'intera matematica su un sistema universale basato su una sua parte non è nuova nella matematica, nè prima nè dopo Frege e Russell: basti ricordare il sistema di Euclide per la geometria, ed il sistema di Zermelo e Fraenkel per la teoria degli insiemi.

I risultati di Gödel fanno giustizia dell'ideale di un sistema universale, e provano che esso non è realizzabile in un senso preciso: non esistono sistemi formali consistenti, sufficientemente potenti e completi.

Naturalmente, essi non escludono la possibilità che l'ideale sia realizzabile in un senso più pragmatico: potrebbe cioè esistere un sistema i cui teoremi comprendano tutto ciò che è umanamente dimostrabile. E l'esperienza attuale permette di avanzare candidati: sia il sistema di Russell che quello della teoria degli insiemi sono infatti perfettamente adeguati per i bisogni attuali dei matematici (forse per un motivo circolare: che non si lavora al di fuori di essi), anche se la soluzione di problemi aperti potrebbe richiedere una loro estensione.

[6] È vero che Russell ha ottenuto il Premio Nobel per la letteratura nel 1950, ma è ben noto che la natura di tale premio è ambigua: esso non solo non è andato a scrittori di ben maggior valore come Musil e Borges (per non parlare di autori che non ci interessano in questa sede, quali Joyce, Proust o Gadda), ma è andato a Solzhenitzin (così come a Churchill) per motivi politici (si ricordi che Sartre lo rifiutò, dopo che gli era già stato assegnato, appunto perchè non voleva un premio che era appannaggio quasi esclusivo di autori occidentali o dissidenti, come Bunin o Pasternak).

Programmi

Hilbert, pur accettando i metodi astratti introdotti da Cantor, propose di provarne la fondatezza con metodi la cui semplicità fosse inattaccabile. Tecnicamente, egli propose il progetto (che divenne noto come *programma di Hilbert*) di dimostrare la consistenza di qualunque sistema formale per la matematica (inclusa quella astratta e infinitista) mediante metodi strettamente concreti e finitisti.

Il programma di Hilbert fu messo in moto dalla distinzione fra due tipi di consistenza per un sistema formale: uno interno, che richiede soltanto che non sia possibile provare sia una formula che la sua negazione, ed uno esterno, che richiede che non sia possibile provare formule false. L'intuizione di Hilbert fu che il primo tipo è sufficiente per l'attività matematica (poichè mette al riparo da contraddizioni) e, riferendosi soltanto a proprietà formali del sistema, può essere descritto in modo semplice. La speranza di Hilbert era che fosse possibile farlo *senza* quantificatori (illimitati), e quindi in modo sufficientemente concreto.

Il programma di Hilbert fu messo in crisi dalla realizzazione (da parte di Gödel) che la descrizione interna di un sistema, benchè effettivamente più semplice di quella esterna (che richiede un numero *illimitato* di quantificatori), richiede in modo essenziale *un* quantificatore (che esprime il fatto che una formula è un teorema se *esiste* una sua dimostrazione).

I 'programmi', di cui quello di Hilbert è un esempio, sono in genere sogni grandiosi collegati ad avvenimenti che accadono nella seguente successione prefissata: successi matematici iniziali di una disciplina, aspettative premature basate su una visione pre-giudiziale, sviluppo di strumenti adeguati che portano la disciplina ad uno stadio di maturità, refutazione del programma come corollario di una visione matura.

Citiamo, per sottolinearne l'ubiquità nella storia dello sviluppo matematico, tre esempi significativi:

- Nel 440 A.C. Ippocrate provò che alcuni tipi di lunette (figure curvilinee delimitate da due archi di cerchi) sono quadrabili (cioè riducibili ad un quadrato con la stessa area) mediante riga e compasso. Tali risultati generarono l'illusione che riga e compasso fossero strumenti universali, e quindi ad esempio che si potesse *quadrare il cerchio*. L'illusione era radicata in un'insufficiente comprensione della portata di tali strumenti, che venne caratterizzata soltanto nel 1837 da Wantzel (in termini di iterazioni di estensioni quadratiche di campi). Tale caratterizzazione produsse una visione matura, e portò alla soluzione negativa del problema della quadratura del cerchio da parte di Lindemann, nel 1882.

- Soluzioni algebriche (mediante radicali) delle equazioni quadratiche erano note fin dall'antichità. Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari trovarono nel XVI secolo soluzioni algebriche per le equazioni di grado 3 e 4, e tale successo generò il programma di *soluzione algebrica per* *le equazioni di ordine superiore*. La soluzione negativa del programma doveva attendere la comprensione, da parte di Vendermonde e Lagrange nel 1771, delle relazioni fra le soluzioni di equazioni di grado ≤ 4 e le proprietà dei gruppi di permutazioni sul corrispondente numero di elementi. Tale comprensione produsse la visione matura, che portò dapprima alla dimostrazione di insolubilità per radicali delle equazioni di grado 5 da parte di Abel nel 1824 (anticipato in parte da Ruffini nel 1799), e poi alla sistematizzazione della materia nella teoria di Galois nel 1831.

- Diofanto considerò, verso il 250, il problema di descrivere le soluzioni razionali di equazioni del tipo $p = 0$, dove p è un polinomio a coefficienti interi (positivi o negativi). A partire da allora lo studio di tali *equazioni diofantine* divenne una parte essenziale della teoria dei numeri, e vari metodi parziali per trovare soluzioni furono trovati. Tali successi indussero Hilbert a proporre, nel 1900, il programma di determinare se un'equazione diofantina ha soluzioni intere.[7] Ancora una volta mancavano i fattori essenziali per una visione matura, che giunse soltanto nel 1970, quando Matiasevitch provò che la determinazione dell'esistenza di soluzioni intere richiede in modo essenziale un quantificatore, e non può quindi essere decisa in modo effettivo.[8]

Metodi

Brouwer ha proposto di restringere i metodi di dimostrazione a quelli *costruttivi*. In questa sua tendenza egli non era che un conservatore che guardava al passato, cioè alla storia sostanzialmente costruttiva dell'intera matematica, e rifiutava una serie di novità recenti (degli ultimi trent'anni dell'800), che ne avevano mutato la prospettiva. In particolare:

- la *teoria degli insiemi* di Cantor ed il suo trattamento dell'infinito
- la *teoria degli ideali* di Dedekind, che si basava sul concetto astratto di ideale oggi classico, e si proponeva come alternativa al trattamento costruttivo ma più complicato di Kronecker
- la dimostrazione del *teorema della base* di Hilbert, che fu chiamata 'teologica' perchè dimostrava l'esistenza di una base finita per ogni insieme di polinomi senza fornire un metodo per trovarla

[7] Il fatto che tale programma sia noto come *10° problema di Hilbert* potrebbe far pensare ad una formulazione della forma: '*esiste* un metodo per determinare se un'equazione diofantina ha soluzioni intere?'. Hilbert lo formulò invece come un programma, nella forma: '*trovare* un metodo per determinare se un'equazione diofantina ha soluzioni intere'.

[8] Non c'è soltanto un'analogia fra le soluzioni del 10° problema e del programma di Hilbert: il risultato di Matiasevitch è un vero raffinamento del risultato di Gödel.

- la dimostrazione del *teorema del buon ordinamento* di Zermelo, che utilizzava un numero infinito di scelte successive per ordinare qualunque insieme.

La restrizione dei metodi dimostrativi è anch'essa ubiqua nella storia della matematica, ed è in genere appunto una reazione all'introduzione di nuovi strumenti, in parte basata su effettivi problemi fondazionali dovuti alla loro ancora insufficiente comprensione. Ricordiamo alcuni esempi significativi:

- Pitagora voleva limitarsi ai numeri razionali, e cercò addirittura di tenere segreta la scoperta degli *irrazionali*
- Platone esaltò l'uso in geometria delle costruzioni ottenibili con *riga e compasso*
- Berkeley sbeffeggiò l'uso degli *infinitesimi* da parte degli analisti
- i *numeri complessi* furono considerati immaginari (e così sono ancora chiamati) per almeno due secoli dopo il loro uso essenziale nella soluzione delle equazioni cubiche
- Hilbert propose di usare nelle dimostrazioni di un risultato soltanto mezzi *puri*, che siano cioè sullo stesso piano dei teoremi da dimostrare.

La restrizione di mezzi dimostrativi e la proposta di programmi eroici sono *opposti estremismi* tipici dei processi storici, e provocati dalle novità: da una parte le si demonizzano temendole, dall'altra le si canonizzano esaltandole. Una loro maggior comprensione produce in seguito la caduta delle ideologie conservatrice e rivoluzionaria, ed una visione più equilibrata di vantaggi e svantaggi delle novità.

3 Matematica: da fare

L'era eroica (e dunque mitologica) della filosofia della matematica nel senso della sezione 2.2 si conclude con il ritorno della fase scientifica, in cui nella riflessione sulla matematica i proclami cedono posto ai risultati.

Diciamo ritorno, e non inizio, perchè in un senso ben preciso la speculazione pre-giudiziale è stata soltanto un periodo di sbandamento, seguito allo sconcerto provocato dalla scoperta del paradosso di Russell. In realtà, sulla matematica si è riflettuto matematicamente fin dalle sue origini.[9]

[9] *I principi della matematica*, scritti da Russell prima della scoperta del suo paradosso, forniscono un'immagine della filosofia della matematica interamente concentrata sull'analisi di definizioni e risultati matematici, e dunque ben diversa da quella fondazionale dei *Principia Mathematica*. E questi possono essere considerati quasi come una parentesi, visto che l'impostazione originale ritorna nell'*Introduzione alla filosofia della matematica*.

Tale riflessione ha interessato tutte le parti della matematica: definizioni, dimostrazioni, teoremi. Qui ci limitiamo a presentare alcuni esempi elementari su ciascuna di esse, anche perchè se si vuole fare della filosofia su certi aspetti della matematica, bisogna prima conoscerli a menadito.

Tali esempi dovrebbero comunque essere sufficienti ad illustrare un aspetto centrale: il fatto cioè che la filosofia della matematica di questo secolo ha abbandonato il *pensiero forte* in favore di un *pensiero debole*, ed oggi preferisce ad un'analisi di tipo globale (sotto forma di sistemi) una tipo locale (sotto forma di osservazioni).

3.1 Definizioni

I problemi filosofici proposti dalle definizioni sono molteplici. Gli esempi seguenti intendono evidenziare come la scelta fra vari tipi di definizioni non possa essere fatta in modo pre-giudiziale, ma richieda un'analisi specifica il cui risultato non è determinato a priori.

Nozioni informali

Il tentativo di definire rigorosamente nozioni informali è tipico non solo della matematica, ma anche della filosofia analitica: esso ha dovuto scontrarsi contro la mistica della vaghezza, secondo cui le nozioni informali hanno contorni indefiniti che non si possono descrivere in modo preciso.

I successi del rigore informale in matematica sono stati esemplari, ed hanno mostrato da un lato che il proposito di rendere preciso l'intuitivo è possibile, e dall'altro che la sua effettiva realizzazione permette di compiere un salto di qualità nella discussione di problemi collegati a tali nozioni.

Esempi storici di analisi formali di nozioni informali sono le definizioni di *area*, *lunghezza* e *continuità* in analisi: in particolare, le soluzioni permettono di dare risposte a domande che sarebbero state altrimenti intrattabili da un punto di vista scientifico (ad esempio, se ci siano figure illimitate con area finita, o curve limitate con lunghezza infinita), e forniscono il punto di partenza per successive elaborazioni (ad esempio, raffinamenti della nozione di continuità mediante ulteriori condizioni di differenziabilità).

Un esempio più recente è dato dall'analisi della nozione informale di *calcolabilità* effettuata da Alan Turing negli anni '30.[10] Egli ha mostrato che essa si può ricondurre alla nozione formale di ricorsività, a cui erano giunti in precedenza Gödel e Church mediante approcci risultati poi equivalenti. Da un punto di vista tecnologico, tale analisi ha fornito la base teorica per la progettazione dei moderni calcolatori elettronici. Da un punto di vista epistemologico, essa ha permesso di attribuire una valenza scientifica a domande in precedenza puramente speculative sulla natura meccanicista delle teorie fisiche (spostando

[10] Si veda il nostro *Alan Turing: informatica, spionaggio e sesso*.

l'attenzione sul fatto se l'evoluzione di un sistema finito con comportamento descritto dalla teoria sia necessariamente ricorsiva).

Definizioni implicite

Consideriamo la *funzione di Fibonacci* (ad argomenti e valori interi), da lui introdotta nel 1202 come soluzione di un problema di riproduzione di conigli:

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 \qquad f(n+2) = f(n) + f(n+1).$$

La definizione di f è implicita (perchè descrive valori della f in termini di altri valori della f stessa), ma non circolare (perchè descrive valori della f in termini di valori precedenti); in particolare, essa permette di calcolare tutti i valori, ma non direttamente: soltanto in successione.

Esplicitare tale definizione (nel senso di trovare espressioni per ciascun valore della f che non facciano riferimento ad altri valori) non è immediato. La soluzione fu trovata da De Moivre nel 1730, mediante la formula[11]

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

che fa intervenire sia la radice irrazionale $\sqrt{5}$ che l'operazione di divisione. Essa è dunque resa possibile soltanto uscendo dall'ambito dei numeri interi in cui si situa la f, ed entrando nell'ambito più esteso dei numeri reali.

Un esempio analogo si ha considerando equazioni come definizioni implicite delle loro soluzioni. Esplicitare tali definizioni (nel senso di trovare espressioni algebriche per le soluzioni) non è immediato già nel caso di *equazioni cubiche* anche di tipo particolare, ad esempio

$$x^3 + m \cdot x = n$$

(alla cui forma si può, mediante opportune trasformazioni, ridurre ogni equazione cubica). La soluzione fu trovata da Cardano nel 1545, mediante la formula

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}},$$

che coinvolge numeri complessi quando $\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}$ è negativo.[12] Si ha così in questo caso un uso dei numeri complessi per definire numeri reali. Ad esempio, nel caso particolare

$$x^3 - 15 \cdot x = 4$$

[11]Non riportiamo le dimostrazioni relative a questo ed al prossimo esempio perchè solo il risultato, e non il modo in cui ad esso si arriva, ci interessa qui.

[12]Si noti che questo non è facilmente ovviabile dicendo che in tal caso non c'è soluzione (come nel caso dell'equazione quadratica), perchè un'equazione cubica ha sempre almeno una radice reale.

si ottiene

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}},$$

che definisce il numero intero 4 facendo intervenire la radice immaginaria $\sqrt{-121}$.

Definizioni effettive

Consideriamo la funzione da interi ad interi definita da

$$f(n) = 2 \cdot f(n+1).$$

Una tale definizione non è effettiva (ad esempio, nel senso che non può essere usata da un computer), perchè non permette di calcolare direttamente i valori di f. Essa infatti genera semplicemente il regresso infinito

$$f(0) = 2 \cdot f(1) = 4 \cdot f(2) = \cdots = 2^n \cdot f(n) = \cdots$$

Effettivizzare la definizione della f non è difficile, ma richiede l'uso di metodi infinitari, in particolare di un numero infinito delle equazioni definenti la f (e non soltanto di un numero finito, come nel caso di definizioni effettive). Infatti, poichè per ogni n si ha

$$f(n) = \frac{1}{2^n} \cdot f(0),$$

l'unico n tale che $\frac{1}{2^n}$ è un numero intero è 0; quindi f è costante, e l'unico valore intero compatibile ad esempio col fatto che

$$f(0) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot f(0)$$

è di nuovo 0. Quindi, un modo equivalente ed effettivo di definire la f è:

$$f(n) = 0.$$

3.2 Dimostrazioni

La filosofia della matematica ha, fra i suoi compiti, l'analisi delle dimostrazioni (eventualmente, ma non necessariamente, di uno stesso teorema), nel tentativo di isolare i loro fattori essenziali: da un lato, enucleando che cosa una dimostrazione dica in più del semplice fatto che la sua conclusione è vera; dall'altro, esplicitando le relazione che essa stabilisce fra gli oggetti o concetti menzionati solo nella conclusione, e quelli menzionati nella dimostrazione.

Riformulazione di risultati

La scoperta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ è uno dei primi risultati significativi della matematica, ma già una sua dimostrazione elementare può far intervenire concetti che sono estranei all'enunciato del teorema: questo infatti parla soltanto di prodotti, mentre la dimostrazione seguente introduce ad esempio la nozione di potenza di 2.

Per dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale, cioè che $m^2 \neq 2 \cdot n^2$ per ogni coppia di interi m e n, basta considerare il massimo divisore della forma 2^x. In un quadrato esso ha sempre esponente pari (eventualmente 0), perchè qualunque esso sia nel numero, il quadrato lo raddoppia; poichè in m^2 un tale divisore ha dunque esponente pari, ma in $2 \cdot n^2$ esso ha esponente dispari (perchè c'è un 2 in più), i due numeri sono diversi.

L'uso della nozione estranea di 'potenza di 2' nella dimostrazione precedente ha però un aspetto positivo: la rende applicabile non soltanto a 2, ma ad ogni numero primo p, mostrando quindi in realtà che $\sqrt{p}$ è irrazionale. In questo modo si ottiene così una riformulazione del risultato, che avvicina i concetti usati nell'enunciato (numero primo) e nella dimostrazione (fattore primo). Inoltre, per buona misura, il risultato originario risulta sostanzialmente rafforzato.

In realtà, una volta svelata una connessione fra i numeri primi e irrazionalità, si può andare ancora un passo oltre e trovare il risultato definitivo in questa direzione: se a non è un quadrato, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale. Infatti, se a non è un quadrato allora almeno uno dei suoi fattori primi ha esponente dispari, mentre tale fattore deve avere esponente pari sia in m^2 che in n^2: dunque esso ha esponente pari in m^2 ma dispari in $a \cdot n^2$, ed i due numeri sono diversi.[13]

Dimostrazioni non costruttive

L'esistenza di infiniti numeri primi è stata dimostrata da Euclide, in un modo ormai classico. Si procede per induzione: il primo numero primo p_0 è 2, e dati i primi $n+1$ primi $p_0, \ldots, p_n$ ce n'è un altro fra $p_n + 1$ e $p_0 \cdots p_n + 1$. Infatti, o $p_0 \cdots p_n + 1$ è primo o ha un fattore che non può essere p_i per nessun $i \leq n$, altrimenti p_i dividerebbe sia $p_0 \cdots p_n$ che $p_0 \cdots p_n + 1$, e quindi dividerebbe 1.

Una tale dimostrazione è, nella terminologia di Brouwer, *costruttiva*: non solo essa dimostra l'asserto, ma lo fa direttamente, fornendo in particolare anche un limite esplicito per l'n-esimo numero primo. Per induzione da essa si ricava infatti che p_n è limitato dall'iterazione n-esima della funzione esponenziale 2^x.

Duemila anni dopo Euclide, Eulero ha dato un'altra dimostrazione dell'esistenza di infiniti numeri primi. Si procede questa volta per contraddizione, usando la serie armonica $\sum_{1 \leq n} \frac{1}{n}$. Poichè n è un qualunque numero intero, esso è scomponibile in fattori primi: a denominatore nella serie appaiono dunque tutti i prodotti finiti di potenze di numeri primi. Allora

$$\sum_{1 \leq n} \frac{1}{n} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right).$$

[13]La dimostrazione originaria dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, qualunque essa fosse, era certamente più specifica e meno adatta alle generalizzazioni, se nel *Teetèto* (147d) Platone enuncia soltanto il risultato che $\sqrt{a}$ è irrazionale per ogni $a \leq 17$ che non sia un quadrato.

Ma ciascun primo p contribuisce la serie geometrica convergente

$$\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}.$$

Se dunque ci fosse soltanto un numero finito di primi, la serie armonica convergerebbe. Ma essa invece diverge, perchè

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
> & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
= & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\\
= & \frac{k+1}{2}
\end{aligned}$$

e dunque per $n=\frac{k+1}{2}$ la somma dei termini fino a $\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{2n-1}}$ è maggiore di n.

La dimostrazione di Eulero è più complicata ed indiretta di quella di Euclide: usa fatti meno elementari, prova non l'asserto ma il fatto che la sua negazione è contradditoria, non fornisce nessun limite esplicito per p_n.

Ma un momento di riflessione mostra che mentre i primi $p_0,\ldots,p_n$ contribuiscono soltanto $\prod_{i\le n}\frac{p_i}{p_i-1}$ alla serie armonica, i termini con denominatore fino a $2^{2(\prod_{i\le n}\frac{p_i}{p_i-1})-1}$ contribuiscono di più. Dunque ci deve essere un nuovo primo p_{n+1} sotto tale limite. Poichè $\frac{p_i}{p_i-1}\le 2$, si ha $p_{n+1}\le 2^{2^{n+1}}$.

La nuova dimostrazione è in un certo senso più profonda, e tale profondità è evidenziata in modo esplicito dal miglior limite che essa fornisce per l'n-esimo numero primo. La sua fecondità è comunque dimostrata in modo ben più pregnante dalla posizione che essa tiene, come suo germe iniziale, nella moderna teoria analitica dei numeri.

Dimostrazioni costruttive

L'esempio precedente ha mostrato come la distinzione fra dimostrazioni costruttive e non costruttive possa risultare non significativa ai fini di una loro valutazione matematica a priori. Il prossimo esempio mostra che la stessa distinzione è in ogni caso troppo cruda, perchè offusca altri aspetti significativi.

Negli *Elementi* Euclide propone un metodo, noto come *algoritmo di Euclide*, per determinare il Massimo Comun Divisore di due numeri interi a e b. Si divide il più grande dei due numeri (ad esempio, a) per il più piccolo (b), ottenendo $a=b\cdot q_1+r_1$; si divide poi b per il resto di tale divisione, ottenendo $b=r_1\cdot q_2+r_2$, e si continua in tal modo, ottenendo la successione:

$$a \quad = \quad b\cdot q_1+r_1$$

$$\begin{aligned}
b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\
&\dots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n \\
r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Il procedimento termina perchè ogni volta il resto è minore del divisore, e quindi la successione dei resti è strettamente decrescente. Inoltre r_n (l'ultimo resto non nullo) è il Massimo Comun Divisore di a e b: esso divide sia a che b perchè divide ogni resto, come si vede risalendo all'insù nella successione precedente; ed ogni divisore di a e b lo divide, come di vede scendendo all'ingiù nella successione.

Tale metodo è alla base della trattazione di Euclide della teoria dei numeri, e permette di provare in seguito l'esistenza ed unicità della scomposizione in fattori primi di un numero intero. Essendo però in possesso di tale risultato, esiste un procedimento ovvio per determinare il Massimo Comun Divisore di due numeri a e b: scomporli in fattori primi, e considerare il prodotto dei loro fattori primi comuni, col minimo esponente.

Oggi possiamo spiegare in termini precisi il fatto che l'algoritmo di Euclide abbia mantenuto un'importanza fondamentale, anche se il secondo metodo è più profondo e dunque in un certo senso più memorabile: la scomposizione in fattori primi è un procedimento costoso, che non si sa fare (per ora) neppure in tempo *polinomiale*, ed è quindi intrattabile anche mediante computers; l'algoritmo di Euclide impiega invece soltanto un numero di passi *logaritmico*, perchè nella peggiore delle ipotesi divide almeno per 2, e quindi dimezza il numero ogni volta.

Siamo quindi di fronte ad un caso in cui metodi astratti devono cedere il passo a metodi più concreti per motivi di efficienza.

Dimostrazioni impure

Supponiamo di voler dimostrare che per ogni numero intero a esiste la parte intera della radice quadrata di a, cioè un numero intero b tale che

$$b^2 \leq a < (b+1)^2.$$

Una dimostrazione diretta si può fare per induzione su a. Se $a = 0$ allora $b = 0$. Supponiamo che b sia la parte intera della radice quadrata di a, in particolare $b^2 \leq a < (b+1)^2$: dato $a+1$, la parte intera della sua radice quadrata è ancora b se $(a+1) < (b+1)^2$, ed è $b+1$ altrimenti.

Una seconda dimostrazione consiste nel notare che se a è un intero allora è un reale ≥ 0, e quindi esiste la sua radice quadrata $\sqrt{a}$: basta dunque prendere il massimo intero $b \leq \sqrt{a}$.

La seconda dimostrazione ha il vantaggio di essere ovvia, e lo svantaggio di far intervenire i numeri reali e le loro proprietà nella dimostrazione dell'enunciato

$$(\forall a)(\exists b)[b^2 \leq a < (b+1)^2],$$

che parla soltanto di numeri interi. La prima dimostrazione è più complicata, ma non fa appello a nozioni che non riguardino i numeri interi: nella terminologia di Hilbert già citata, essa è *pura*.

Le dimostrazioni impure possono usare mezzi che esulano dall'ambito ristretto dell'enunciato da dimostrare, ed incarnano quindi una *tendenza machiavellica* della matematica: il fine di provare un enunciato giustifica ogni mezzo dimostrativo. Non a caso esse sono state beniamine dei Principi (della matematica), da Gauss (per la sua dimostrazione 'topologica' del *Teorema fondamentale dell'algebra*) ad Hilbert (per la sua dimostrazione 'teologica' del *Teorema della base*). Esse sono però fuori della portata dei metodi automatici di dimostrazione, che sono costretti a limitarsi ad una ricerca nei sistemi da essi automatizzati, senza poterne uscire.

Dimostrato un enunciato con mezzi impuri si possono ovviamente cercarne dimostrazioni pure: non soltanto per motivi estetici, ma anche per l'informazione aggiuntiva che esse in genere possiedono. Si può però procedere anche nella direzione contraria: i mezzi che esulano dall'ambito ristretto dell'enunciato da dimostrare possono infatti far parte di un sapere matematico acquisito, e fornire quindi dimostrazioni più comprensibili o memorabili di quelle pure. Un esempio classico è dato dalla dimostrazione di Cantor dell'*esistenza di numeri reali trascendenti* (corollario immedediato della numerabilità dei reali algebrici e della non numerabilità dei reali), che ha soppiantato la dimostrazione originaria di Liouville nell'inconscio collettivo dei matematici.

Come già per le dimostrazioni costruttive, non si può dunque decidere a priori se le dimostrazioni pure siano preferibili a quelle impure.

3.3 Teoremi

La caratteristica (ovviamente essenziale) dei teoremi di essere 'veri' è in un certo senso il loro aspetto meno interessante: molto è infatti vero, ma poco è significativo. La riflessione sulla matematica ha anche il compito fondamentale di isolare gli aspetti di interesse nei risultati matematici, o la loro mancanza.

Sarebbe ridicolo presentare qui esempi di risultati significativi. È più sensato rinviare alle esposizioni di storia della matematica che ne privilegiano gli aspetti scientifici. Ad esempio, *Viaggio attraverso il genio* di Dunham ad un livello elementare (ma non banale), e *History of mathematics* di Stillwell ad un livello più elevato.

Aggiungiamo soltanto che il criterio di selezione delle aree di ricerca in generale e dei risultati in particolare è di importanza primaria per la vitalità della matematica. L'esplosione quantitativa dell'attuale momento storico (forse utile, ma certo non sufficiente, per far carriera) si può paragonare all'inquinamento ambientale, e come questo può provocare effetti deleteri. Una riflessione che permetta di dimenticare il dimenticabile può dunque essere paragonata ad una azione di disinquinamento.

Scelta

La riflessione può essere utile a cercare di spostare l'accento da certi aspetti che possono essere risultati non fecondi, ad altri che lo siano.

Un esempio classico è fornito dalla *determinazione esplicita dell'n-esimo numero primo p_n*, ad esempio in termini di una formula algebrica (eventualmente ricorsiva, cioè coinvolgente i precedenti primi), una ricerca che ha occupato molti matematici fino ad Eulero. Il cambio di obiettivo risale a Gauss, che ha chiesto non più una formula esatta (che ancora oggi non si conosce), ma soltanto una approssimata, ed ha congetturato che asintoticamente p_n fosse uguale ad $n \cdot \log n$. La sua congettura fu verificata da Hadamard e de la Vallée Poussin nel 1896, e tale risultato è diventato centrale nella teoria dei numeri, al punto di meritarsi il nome di Teorema dei Numeri Primi. Fra parentesi, la dimostrazione originaria usava metodi impuri (analitici) in modo essenziale, ed una dimostrazione pura è stata trovata solo molto dopo.

Un altro esempio classico è dato dal *10º problema di Hilbert*, che richiede un metodo per la determinazione di esistenza di soluzioni *intere* di equazioni diofantine, invece delle soluzioni *razionali* che erano la prassi a partire da Diofanto stesso. Come abbiamo già notato, tale cambiamento d'accento ha permesso la soluzione (negativa) del problema da parte di Matiasevitch, mentre l'analogo problema per le soluzioni razionali è ancora aperto.

Interpretazione

La tesi filosofica, attribuita a Pitagora, che 'i numeri razionali sono la misura di tutte le cose' è un esempio ulteriore di 'programma' nel senso considerato nella sezione 2.2. Secondo lo schema generale ivi descritto, essa attendeva per la sua refutazione soltanto una visione più matura dei numeri razionali, che fu traumaticamente generata dalla dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Tale risultato ci interessa però qui per un motivo diverso, e cioè come illustrazione del fatto (certo diffuso, e forse universale) che in esso ci sono aspetti non apparenti, dipendenti soltanto dalla sua verità o falsità, e dunque evidenziabili mediante un'attività più filosofica (di riflessione) che matematica (di dimostrazione).

Nel nostro caso particolare, il fatto algebrico dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ viene reinterpretato come l'espressione di proprietà metamatematiche di sistemi formali, nel modo seguente.

- La formula $(\exists x)(\exists y)[(x+1)^2 = 2 \cdot y^2]$, in cui usiamo $x+1$ per escludere il caso banale $0^2 = 2 \cdot 0^2$, è indipendente da qualunque sistema di assiomi (per somma e prodotto) soddisfatti sia dai numeri interi che da quelli reali (perchè essa è falsa nel primo caso, e vera nel secondo): in altre parole, ogni tale sistema è incompleto.

- Viceversa, l'indipendenza della formula da tali sistemi prova che essa è falsa per i numeri interi. Se infatti essa fosse vera, ci sarebbe una coppia di interi m ed n tali che $(m+1)^2 = 2 \cdot n^2$; ma tale formula non contiene variabili nè quantificatori, e sarebbe dunque dimostrabile in uno qualunque dei sistemi di assiomi elementari veri sia per i numeri interi che per quelli reali, e che permettono di dimostrare ogni formula (nel linguaggio di somma e prodotto) vera per i numeri interi e senza variabili nè quantificatori. In particolare, la formula considerata nel punto precedente sarebbe dimostrabile in, e dunque non indipendente da, tale sistema.

- Analogamente, la formula $(\forall x)(\forall y)[(x+1)^2 \neq 2 \cdot y^2]$, negazione di quella precedente, è indipendente e vera per i numeri interi.

L'esempio mostra come ogni sistema formale di un certo tipo per i numeri interi sia incompleto. Gödel ha indebolito (nel risultato già citato) le condizioni su cui tale risultato si basa, fornendo una dimostrazione generale dell'incompletezza di *ogni* sistema di assiomi per i numeri interi consistente e che permetta di dimostrare ogni formula (nel linguaggio di somma e prodotto) vera per i numeri interi e senza variabili nè quantificatori.

La sua dimostrazione ricalca quella di Kant citata verso la conclusione della sezione 2.1: dato un sistema matematico, Gödel considera un'idea trascendentale ottenuta come limite della non dimostrabilità nel sistema (una formula che dica di sè stessa che non è dimostrabile nel sistema), e mostra che se il sistema è completo (cioè decide ogni formula, dimostrando o essa stessa o la sua negazione) allora si cade nell'inconsistenza.

Sistematizzazione

Provare un risultato significa soltanto portarlo alla luce nel mondo della matematica, farlo nascere come individuo. Come per un essere umano, questo non è che l'inizio della storia: rimane da trovargli una collocazione fra gli altri individui, farlo interagire con essi, scoprire ed attualizzare le sue potenzialità.

Le opere di sistematizzazione della matematica servono appunto allo scopo di evidenziare i rapporti relativi fra risultati matematici diversi. E poichè le scelte non possono essere esaustive e dunque non sono univoche, ciascuna di esse fornisce una possibile visione di una o più aree della matematica: in altre parole, implicitamente, una filosofia della matematica.

Ad esempio, gli *Elementi* di Euclide mostrano un'immagine della matematica basata sulla geometria, e un'immagine della geometria come sistema formale basato sulla logica e su cinque assiomi specifici. Implicito in tale approccio è l'ideale di un singolo sistema universale in cui si possa sviluppare l'intera matematica: un ideale che ancora oggi ha il suo fascino, e che in questo secolo ha visto ulteriori tentativi di realizzazione, dai *Principia Mathematica* alle teorie degli insiemi prima, e delle categorie poi.

All'altro estremo dello sviluppo storico, gli *Elementi* di Bourbaki propongono un'immagine diversa della matematica, basata su un piccolo numero di strutture (ad esempio algebriche o topologiche) che sono applicabili in un gran numero di situazioni.[14] Fascino a parte, esse sono entrate a far parte dell'*uso* comune della comunità matematica, andando ben oltre il tributo puramente verbale che l'approccio insiemistico ha suscitato (per non parlare del totale disinteresse per l'approccio categoriale, inteso non come strumento matematico ma come alternativa fondazionale).

[14]Esse sono chiamate *strutture madri* ma, in questi tempi di recrudescenza imperial-colonialista, si potrebbero chiamare le *madri di ogni struttura*.