MAURITS CORNELIS ESCHER
Arte del puzzle, e puzzle dell'arte

Piergiorgio Odifreddi

Luglio 1994

Maurits Cornelis Escher (1898–1972) occupa un ruolo speciale nella storia dell'arte contemporanea per la sua produzione posteriore al 1935, anno in cui lasciò l'Italia fascista dopo una permanenza di dodici anni a Roma per tornare, dopo due ulteriori anni in Svizzera e cinque in Belgio, definitivamente in Olanda.

Fino ad allora egli si era dedicato a litografie e silografie,[1] principalmente di paesaggi e architetture; dopo di allora, pur mantenendo lo stesso mezzo espressivo, il contenuto delle sue opere divenne sempre meno raffigurativo e sempre più intellettuale, ed egli si ritrovò ad usare in maniera crescente, dapprima inconsciamente e poi volutamente, motivi matematici:

> Affrontando gli enigmi che ci circondano, e considerando e analizzando le mie osservazioni, sono finito nel dominio della matematica. Benchè mi manchino completamente educazione e conoscenza scientifiche, spesso mi sembra di avere più in comune con i matematici che con i miei colleghi artisti. (p. 55)[2]

[1] Le *litografie* si disegnano con un gesso speciale su pietra, e si stampano. Le *silografie* si incidono su legno, e si possono stampare o con una pressa o, come faceva Escher, imprimendo l'inchiostro spalmato sul legno passando un cucchiaino d'avorio sulla carta (come si farebbe con un unghia).

[2] Tutte le citazioni si riferiscono a Locher, *M.C. Escher: his life and complete graphic work*, 1981.

La sua originale ed inusuale estetica gli procurò sì notorietà nel campo scientifico, a partire dalla mostra dei suoi lavori organizzata in occasione del Congresso Internazionale di Matematica del 1954 ad Amsterdam, ma gli alienò anche le simpatie del campo artistico, con accuse di eccessive freddezza, astrazione e convenzionalità stilistica:

> Sto incominciando a parlare un linguaggio che è capito da pochi. Mi fa sentire sempre più solo. Dopo tutto, non sto più da nessuna parte. I matematici possono essere amichevoli e interessati e darmi una paterna pacca sulla spalla, ma alla fine per loro sono solo un dilettante. Gli 'artisti' in genere si irritano, ed io sono a volte assalito da un immenso senso di inferiorità. (pp. 92)

Oggi le cose sono cambiate, e la situazione si è ribaltata: caratteristiche più appariscenti dell'opera di Escher hanno preso il sopravvento sugli aspetti matematici, trasformando l'artista (suo malgrado, benchè non soltanto post mortem) in un illustratore di copertine, magliette e poster.

Poichè però proprio nell'aspetto intellettuale risiede il duraturo valore della produzione di Escher, non è forse inappropriato riflettere su di esso, cercando di sottolineare sia le fonti che le novità dei motivi più strettamente matematici. Senza esagerare, però, visto che Escher si lamentò spesso di non capire appieno nè il linguaggio dei matematici nè la sostanza delle loro osservazioni, pur convenendo che senza spiegazioni le sue immagini possono risultare troppo ermetiche.

Geometria euclidea solida

La matematica si è intromessa nelle arti figurative ogni volta che (da Leonardo ai cubisti) si sono rappresentate figure geometriche, in particolare solidi di varia forma.

Escher è stato particolarmente attratto dai poliedri regolari (o *solidi platonici*), perchè questi "simboleggiano in maniera impareggiabile l'umana ricerca di armonia e ordine, ma allo stesso tempo la loro perfezione ci incute un senso di impotenza". Essi hanno per facce uno stesso poligono regolare, con lo stesso numero di facce ad ogni vertice, e Teeteto scoprì che sono solo cinque:[3] tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.

[3] La somma degli angoli che le facce formano ad un vertice deve essere minore di 360°,

Cubo e ottaedro sono detti reciproci, perchè uno ha tre facce quadrate in ogni vertice, l'altro quattro facce triangolari. Secondo Escher "la magnifica fusione di un cubo e un ottaedro non esiste, ma nondimeno possiamo continuare a sperarla" (p. 60). Nell'attesa, egli l'ha mirabilmente rappresentata in *Quattro solidi regolari* (Figura 1), all'interno dell'altrettanto magnifica fusione di icosaedro e dodecaedro, che sono anch'essi reciproci. Grazie ai colori ed ai tratteggi, possiamo vedere in una stessa figura sia i quattro solidi individuali, che le loro due intersezioni.

Il tetraedro è reciproco di se stesso, perchè ha tre facce triangolari in ogni vertice. L'intersezione di due tetraedri uguali si chiama *stella ottangula*, ed ha interessanti proprietà: guardando al suo interno, essa è costituita da un ottaedro sulle cui facce sono state poste piramidi triangolari; guardando al suo esterno, i vertici della stella sono i vertici di un cubo, le cui facce hanno per diagonali i lati della stella. Questo staordinario poliedro è stato raffigurato da Escher in *Doppio pianetoide* (Figura 2), dopo che esso l'aveva "disturbato per anni" (p. 62).

Il processo di stellazione (aggiunta di piramidi sulle facce) si può applicare anche al dodecaedro, ottenendo un poliedro di "perfettamente ordinata bellezza" (detto *piccolo dodecaedro stellato*), che si può pure vedere come l'intersezione di dodici facce a stella regolare (la figura resa popolare dalle Brigate Rosse, e che è a sua volta una stellazione piana del pentagono regolare mediante aggiunta di triangoli sui lati). Esso era molto amato da Escher perchè è allo stesso tempo semplice e complicato, ed egli lo rappresentò più volte: in particolare in *Gravità* (Figura 3), con un mostro su ciascuna faccia.

In *Stelle* (Figura 4) il poliedro principale è l'intersezione di tre ottaedri disegnati nello stile di Leonardo (per le illustrazioni del *De divina proportione* di Luca Pacioli), e le 'stelle' sono una fantasmagoria di poliedri più o meno regolari: fra esse compaiono non solo i cinque solidi platonici, ma anche

altrimenti esse sarebbero in piano. I triangoli regolari hanno angoli di 60°, e quindi al più 5 possono convergere in un vertice: si hanno così tre possibilità, e cioè *tetraedro* (3 facce), *ottaedro* (4 facce) e *icosaedro* (5 facce). I quadrilateri regolari (quadrati) hanno angoli di 90°, e quindi al più 3 possono convergere in un vertice: si ha così una sola possibilità, il *cubo*. I pentagoni regolari hanno angoli di 108°, e quindi al più 3 possono convergere in un vertice: si ha così una sola possibilità, il *dodecaedro*. Gli esagoni regolari hanno angoli di 120°, e quindi al più 2 possono convergere in una faccia: ma ogni vertice deve avere almeno 3 facce, e quindi non c'è nessuna possibilità, ed analogamente per facce con più di sei lati.

l'intersezione di cubo e ottaedro (angolo Nord-Ovest), la stella ottangula (angolo Nord-Est), l'intersezione di due cubi con un vertice in comune (angolo Sud-Ovest), e una versione solida e più comprensibile della figura principale (angolo Sud-Est).

Un ultimo uso dei poliedri regolari riguarda la possibilità di riempirne l'intero spazio (la cosiddetta *tassellazione dello spazio*), ed introduce all'argomento delle due successive sezioni. L'unico dei cinque solidi platonici che riempia da solo lo spazio è il cubo, ma tetraedri ed ottaedri alternati (i primi in quantità doppia dei secondi) raggiungono lo stesso scopo. Entrambe tali tassellazioni dello spazio sono state rappresentate da Escher, in *Divisione cubica dello spazio* e *Platelminti* (Figure 5 e 6).

Geometria euclidea piana

Per sua stessa ammissione, il soggetto che più interessò Escher fu la divisione regolare del piano:

> Non so immaginare che cosa la mia vita sarebbe stata senza questo problema. (p. 67) Mi ci imbattei molto tempo fa, durante le mie peregrinazioni; vidi un alto muro e, come per la premonizione di un'enigma, di qualcosa che esso potesse nascondere, lo scalai con qualche difficoltà. Dall'altro lato, però, mi ritrovai in una giungla; dopo essermi aperta la via con grande sforzo giunsi alla porta aperta della matematica, da cui si dipartivano cammini in ogni direzione. A volte penso di averli percorsi tutti, ammirandone le vedute; e poi improvvisamente scopro un nuovo cammino e sperimento una nuova delizia. (p. 156)

Il problema in questione viene chiamato *tassellazione del piano*: esso consiste nel ricoprire l'intero piano mediante tasselli, come in un gigantesco puzzle, e fu studiato matematicamente per la prima volta da Keplero nell'*Harmonice mundi* (1619).

La grande varietà delle possibili tassellazioni, a cui Escher allude, può essere circoscritta imponendo opportune limitazioni, di cui le più ovvie sono le seguenti:

- Una tassellazione viene detta *monoedrica* se usa un solo tipo di tassello, e *biedrica* se se ne usa due.

- Una tassellazione viene detta *isoedrica* se tutti i tasselli hanno la stessa relazione con il resto della tassellazione: in particolare, non solo sono tutti uguali, ma giocano anche tutti lo stesso ruolo.[4]
- Una tassellazione viene detta *monomorfa* se è l'unico modo possibile di combinare i tasselli per ricoprire il piano.[5]

Fantasmi (Figura 7) è l'unico esempio in Escher di una tassellazione monoedrica ma non isoedrica: il tassello è unico, ma è usato in maniere diverse (alcuni fantasmi sono raggruppati, altri sono isolati). L'esempio è interessante perchè non isoedrico in modo essenziale: ogni tassellazione del piano che usi quel tipo di tassello deve essere non isoedrica (questo deriva dal fatto, non ovvio, che la tassellazione della figura è monomorfa). La prima di tali tassellazioni fu trovata da Heesch nel 1935, che risolse il cosiddetto *18° problema di Hilbert*, ma Escher si ispirò ad un successivo esempio di Penrose.[6]

Anche la tassellazione di *Studio di divisione regolare del piano con angeli e diavoli* (Figura 8) sembra non isoedrica perchè è a prima vista biedrica, cioè costituita da due tipi di tasselli (un angelo e un diavolo). In realtà essa è monoedrica se la considera come costituita da un solo tassello, ad esempio un angelo e un diavolo, ma anche mezzo angelo e mezzo diavolo; in entrambi i casi essa è isoedrica, anche se in modi diversi (nel secondo caso, ma non nel primo, sono necessarie riflessioni, per ottenere una metà di un angelo e un diavolo dall'altra metà).[7]

Escher non è certo stato il primo artista ad usare tassellazioni del piano: l'esempio delle decorazioni moresche dell'Alhambra di Granada è ben noto, e

[4]In termini più matematici, si chiama *isometria* una combinazione di traslazioni lungo una retta (verticale o orizzontale), rotazioni attorno a un punto (ad esempio, si passa da 'b' a 'p' mediante una rotazione di 180°), e riflessioni rispetto ad una retta (ad esempio, si passa da 'b' a 'd' mediante una riflessione rispetto ad una retta verticale, e da 'b' a 'p' mediante una riflessione rispetto ad una retta orizzontale).

Una tassellazione è isoedrica se dati due qualunque tasselli esiste una isometria che sposta localmente uno dei due tasselli nell'altro, ma lascia globalmente invariata la tassellazione.

[5]Ad esempio, gli unici poligoni regolari che riempiano da soli il piano sono il triangolo, il quadrato e l'esagono. La tassellazione mediante esagoni è monomorfa, ma non così quelle mediante triangoli o quadrati (perchè il piano si può ricoprire con striscie parallele costituite di quadrati, o di triangoli alternati, e le striscie possono essere affiancate in modi diversi, facendole scorrere).

[6]Lionel e Roger Penrose, Puzzles for Christmas, *New Scientist*, Dicembre 1958.

[7]A futura memoria, si noti che le ali si incontrano 4 a 4, i piedi 2 a 2.

fu da lui stesso studiato in maniera approfondita, durante due viaggi nel 1922 e 1936. A causa della proibizione religiosa di rappresentare esseri viventi[8] i Mori non poterono però usare altro che motivi geometrici astratti, mentre Escher trovò più attraenti rappresentazioni di figure animate, specialmente pesci e uccelli.

Sia i Mori che Escher furono interessati ad una esplorazione sistematica della tassellazione isoedrica, ed usarono quasi tutte le 17 possibili isometrie descritte dal cristallografo russo Fedorov nel 1891 (più precisamente: 11 i Mori, e 16 Escher). Mentre i Mori dovettero ovviamente scoprire da soli le varie possibilità, Escher conobbe fin dal 1937 (grazie al fratello, che era professore di geologia) il famoso articolo di Pólya[9] in cui le 17 possibilità furono riscoperte ed illustrate, e lo ricopiò accuratamente.

L'originalità matematica di Escher fu invece più evidente nell'uso delle *tassellazioni cromatiche*, in cui ogni isometria che lascia invariata la tassellazione permuta i colori in modo non ambiguo. Egli le studiò autonomamente, riportando i risultati nel 1941–42 in un quaderno che non pubblicò, ma che usò per catalogare le proprie incisioni.[10] In particolare, Escher ritrovò indipendentemente 14 delle 46 possibili isometrie bicromatiche classificate da Woods nel 1936, in un lavoro che però rimase ignoto (anche ai cristallografi, non solo ad Escher) fino agli anni '50, quando i suoi risultati furono riscoperti da Shubnikov, che in seguito fu entusiasmato dai disegni di Escher.

I cristallografi riconobbero ripetutamente l'aspetto pionieristico del lavoro di Escher nel loro campo, e l'Unione Internazionale di Cristallografia lo invitò a tenere una conferenza al congresso del 1960, e gli commissionò l'illustrazione di un testo con 42 dei suoi disegni, pubblicato nel 1965 a cura di Carolina MacGillavry.

---

[8]Sembra che la proibizione non sia esplicita nel Corano, e derivi quindi soltanto dalla tradizione islamica. Essa è invece esplicita nella Bibbia, come secondo comandamento: "non ti fare nessuna scultura nè immagine delle cose che splendono nel cielo, o sono sulla terra, o nelle acque sotto la terra" (*Esodo*, 20.4).

[9]G. Pólya, Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene, *Zeitschrift für Kristallograpie*, 60 (1924) 278–282.

[10]In esso egli annunciò anche due teoremi, senza dimostrazione: uno sui triangoli, l'altro sugli esagoni. Entrambi sono stati dimostrati recentemente, nel 1991.

Geometria non euclidea piana

Il problema della tassellazione si può estendere dal piano euclideo a superfici più complicate. Gli esempi più semplici di tali superfici sono la sfera e il cilindro.

La *sfera* è limitata nello spazio, e può dunque essere interamente tassellata con un numero finito di tasselli. Questo fatto è, secondo Escher, "un meraviglioso simbolo dell'infinito in forma chiusa" (p. 169), ed egli l'ha illustrato intagliando varie sfere di legno: in particolare la *Sfera con angeli e diavoli* (Figura 9), che adatta la simile tassellazione del piano della Figura 8.[11]

Il *cilindro* si ottiene incollando fra loro gli estremi di una striscia (infinita in una direzione). Ogni tassellazione del cilindro ne genera una del piano, perchè basta ripetere all'infinito la striscia che genera il cilindro. Ma non tutte le 17 tassellazioni isoedriche del piano generano tassellazioni isoedriche del cilindro, perchè alcune isometrie si possono perdere. Escher ha illustrato la tassellazione di cilindri piastrellando varie colonne, e la Figura 10 mostra appunto un esempio in cui una isometria del piano (che consiste nel sovrapporre una delle lucertole di un colore con una di un altro, mediante una rotazione di 90° e una traslazione) cessa di essere una isometria del cilindro (perchè una colonna verticale ruotata di 90° diventa una colonna orizzontale).

La *striscia di Möbius* si ottiene incollando fra loro gli estremi di una striscia (infinita in una direzione), dopo averle fatto compiere un mezzo giro (o, più in generale, un numero dispari di mezzi giri). Essa gode di due interessanti proprietà: ha una sola faccia, invece di due come le solite superfici; e se la si taglia lungo la linea centrale della striscia non la si separa in due, come per il cilindro, bensì se ne raddoppia la lunghezza (ottenendo una striscia che non è più di Möbius, e che ha due facce). Queste proprietà sono così strane che hanno distratto Escher dal problema della tassellazione,[12] facen-

[11] Ora però (vedi nota 7) le ali si incontrano 3 a 3, e i piedi 2 a 2. Gli angeli sono in rilevo al polo nord (il paradiso) e i diavoli al polo sud (l'inferno), mentre all'equatore essi giacciono su uno stesso piano.

[12] C'è in realtà anche un altro motivo. Come per il cilindro, ogni tassellazione della striscia di Möbius ne genera una del piano, ma non viceversa. Nel passaggio dal piano alla striscia si perdono però molte più isometrie che nel caso del cilindro: quando si riporta la striscia sul piano, la retta centrale si ricongiunge a se stessa, mentre le rette parallele ad essa le zig-zagano intorno (a causa del mezzogiro). Poichè nessuno di questi zig-zag può essere trasformato in una retta da una isometria, le sole isometrie del piano che si trasferiscono

dogli produrre invece le due efficaci *Striscie di Möbius* (Figure 11 e 12), la prima con un solo mezzo giro, la seconda con tre.

Nonostante il loro carattere non euclideo in quanto superfici, gli esempi precedenti (sfera, cilindro, striscia di Möbius) sono comunque immergibili nello spazio euclideo. Il *piano iperbolico* (caratterizzato dal fatto che per un suo punto passano più parallele ad una retta data) è invece una superficie non euclidea che non si può immergere nel piano euclideo direttamente (misurando cioè le distanze sulla superficie, nel solito modo). È però possibile immergerlo indirettamente, e due famosi modelli della geometria iperbolica sono stati trovati da Henri Poincaré: uno consiste di un cerchio euclideo senza il bordo (la circonferenza), l'altro di un semipiano euclideo senza il bordo (la retta che determina il semipiano), ed in entrambi i casi le rette iperboliche sono rappresentate da archi di cerchi euclidei ortogonali al bordo.

Escher venne a conoscere la geometria iperbolica nel 1958, tramite il geometra Coxeter (incontrato al Congresso di Amsterdam nel 1954), e fu affascinato dal fatto che il primo modello di Poincaré richiede solo una porzione limitata del piano euclideo per rappresentare l'intero piano iperbolico: le rappresentazioni di tassellazioni del piano iperbolico possono dunque essere complete, a differenza di quelle del piano euclideo (di cui si può rappresentare solo una parte). Escher produsse quattro famosi esempi, i *Limite del cerchio* I-IV: essi furono analizzati in dettaglio dal punto di vista matematico da Coxeter,[13] ed uno (Figura 13) è un ulteriore adattamento della tassellazione del piano euclideo con angeli e diavoli.[14]

Le tassellazioni iperboliche sono soltanto l'ultimo stadio di una serie di sperimentazioni che Escher effettuò con tassellazioni le cui figure rimpiccioliscono quando si avvicinano ad un limite, e che si possono classificare in tre tipi:

---

alla striscia devono lasciare invariata la retta centrale, ed essere dunque combinazioni di traslazioni parallele ad essa, e riflessioni attorno ad essa. Questo elimina 13 delle 17 isometrie del piano, lasciandone solo 4 per la striscia, e rendendo così la tassellazione di questa un problema meno interessante che per il piano o il cilindro.

[13]The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit III", *Leonardo*, 12 (1979) 19–25; Angels and devils, in David Klarner (curatore), *The mathematical Gardner*, 1981, pp. 197–209; e A special book review, *Mathematical Intelligencer*, 7 (1985) 59–69.

[14]Ora però (vedi note 7 e 11) le ali si incontrano 4 a 4, e i piedi 3 a 3. Si noti anche che tutti gli angeli (così come tutti i diavoli) hanno le stesse dimensioni iperboliche, nonostante l'apparente diminuzione euclidea (dovuta al fatto che le distanze si misurano diversamente nei due casi).

- Usando come limite un *punto*, come in *Sempre più piccolo* (Figura 14), la tassellazione richiede ancora l'intero piano: infatti le figure si ingrandiscono senza limite quando si allontanano dal punto.

- Usando come limite una *retta*, come in *Divisione regolare del piano* VI (Figura 15), la tassellazione richiede ancora (o solo più) metà del piano. Escher ritenne che il guadagno non fosse molto, e non seppe mai che in tal modo avrebbe invece potuto tassellare il secondo modello di Poincaré.[15]

- Usando come limite una *circonferenza*, come nel *Limite del cerchio* IV (Figura 13), la tassellazione richiede solo più una zona limitata, pur rimanendo infinita. Questa era proprio la soluzione che Escher aveva invano cercato, senza riuscire a trovarla da solo.

Metamorfosi

L'interesse di Escher per le tassellazioni era non fine a se stesso, ma finalizzato ad una loro trasfigurazione artistica. Frammenti di tassellazioni appaiono così in una sessantina di suoi lavori, in cui egli sfruttò a fondo il fatto che in una tassellazione biedrica ciascuno dei due tipi di tasselli svolge due ruoli complementari, di figura e sfondo, secondo un principio basato sul cosidetto *vaso di Rubin*[16] (in cui due profili di facce possono essere visti come il contorno di un vaso). Poichè non è però possibile percepire una figura in assenza di sfondo, il risultato è una alternanza instabile di due figure, ciascuna delle quali viene percepita per un breve periodo sullo sfondo dell'altra.

Usando variazioni dinamiche nelle tassellazioni biedriche secondo principi e tecniche della psicologia Gestalt,[17] di cui era interessato conoscitore, Escher riuscì ad illustrare convincentemente il passaggio dal bidimensionale al tridimensionale e la morfogenesi, facendo evolvere indipendentemente e

---

[15] Sia in *Sempre più piccolo* che in *Divisione regolare del piano* VI i tasselli decrescono secondo il seguente algorimo: dato un triangolo retto isoscele, se ne costruiscono due simili ad esso sui suoi lati. I triangoli in questione sono delimitati da tre lucertole ciascuno.

Entrambe le figure sono dunque rappresentazioni visive del paradosso di Zenone, secondo cui $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=1$, oltre che esempi di *tassellazioni autosimili*, oggi attivamente studiate.

[16] Edgar Rubin, *Synsoplevede Figurer*, Copenhagen, 1915.

[17] 'Gestalt' significa insieme organizzato di parti individuali che interagiscono, in modo tale che il tutto sia maggiore della somma delle parti.

gradualmente i due tipi di tasselli in figure indipendenti e spaziali. Simmetricamente, le metamorfosi di Escher evidenziano la sintesi dialettica, fra positivo e negativo, che le tassellazioni biedriche contengono.

A titolo di esempio (non casuale, visto che essa è la silografia di cui Escher ha venduto più copie), *Giorno e notte* (Figura 16) mostra una combinazione di entrambi i processi: la tassellazione bidimensionale centrale si evolve in raffigurazioni tridimensionali ai lati, ed esse rappresentano la stessa immagine non solo di giorno e di notte, come il titolo suggerisce, ma anche specularmente, oltre che in positivo e in negativo.[18]

Nel saggio *Divisione regolare del piano* Escher discusse un'analogia tra le sue metamorfosi (successioni statiche di immagini) sia col cinema (successione dinamica di immagini) che con la musica (successione dinamica di suoni). Più precisamente, egli sostenne di usare gli stessi procedimenti (ripetizione, aumento, riduzione, sovrapposizione e inversione) del contrappunto di Bach (p. 172), dando così il 'la' a Hofstadter per il suo celebre *Gödel, Escher e Bach*.

Paradossi percettivi

Alla fine della *Poetica*, Aristotele ripete due volte che "una convincente impossibilità è preferibile ad una non convincente possibilità". Alcune delle opere più famose di Escher sono perfette illustrazioni di questo motto, oltre che di alcuni ben noti paradossi percettivi (basati sul contrasto tra percezione e interpretazione di dati sensoriali, e sul condizionamento fisiologico[19] e culturale che spinge a considerare figure bidimensionali come rappresentazioni di oggetti tridimensionali).

Belvedere (Figura 17) è ispirato al *cubo di Necker*,[20] che si ottiene disegnando un cubo in prospettiva, con tutti i lati in evidenza: così facendo si crea un'ambiguità su quale delle facce sia davanti e quale dietro, e due possibili cubi si alternano nella percezione. Il cubo di Necker è disegnato nel

[18]Fra parentesi, *Giorno e notte* ha ispirato l'intera attività artistica di William Huff, basata su tassellazioni dinamiche con tasselli geometrici. Vedi 'Parquet deformations', in Douglas Hofstadter, *Metamagical themas*, Basic Books, 1985, pp. 191–212.

[19]L'immagine del mondo tridimensionale sulla retina è bidimensionale.

[20]A.L. Necker, Observations on some remarkable phenomena seen in Switzerland; and an optical phenomenon which occurs on viewing of a crystal or geometric solid, *Philosophical Magazine*, 1 (1832) 329–337.

progetto che sta ai piedi del personaggio seduto sulla panca (con i due punti problematici evidenziati), ed egli tiene in mano un modello di *cubo impossibile*, in cui l'ambiguità viene risolta fondendo le due possibilità, e creando così un cubo localmente corretto (nella parte alta e in quella bassa), ma globalmente impossibile. L'edificio della figura realizza poi il cubo impossibile, congiungendo paradossalmente le parti alta e bassa, che sono separatamente consistenti.

Convesso e concavo (Figura 18) illustra due paradossi. Il primo, detto dei *cubi reversibili*, era già noto ai romani, che l'hanno usato in vari mosaici, ed è stato sfruttato in modo sistematico da Victor Vasarely (la cui opera Escher però disprezzava): tre rombi adiacenti sono visti come le facce di un cubo, ma possono essere interpretati sia come facce esterne che come facce interne;[21] inoltre, se ce ne sono più di tre quelli non estremi possono appartenere a più di un cubo, facendo apparire l'immagine alternativamente convessa e concava. Cubi reversibili sono disegnati sulla bandiera in alto a destra della figura, e questa realizza il contrasto convesso/concavo fra le parti sinistra e destra. In particolare, dei tre tempietti cubici quello centrale è ambiguo, e rappresenta quindi un cubo reversibile, mentre quelli ai lati mostrano le due possibilità separatamente, dall'esterno e dall'interno.

Il secondo paradosso, detto *scala di Schröder*,[22] mostra come il disegno di una scala possa risultare ambiguo, ed essere considerato allo stesso tempo come la rappresentazione di una scala sia su un pavimento (a sinistra) che su un soffitto (a destra), o da percorrere stando sia sopra i gradini che sotto di essi.

Relatività (Figura 19) combina la scala di Schröder con il *triangolo impossibile*,[23] disegnato in prospettiva in modo da avere ogni coppia di lati perpendicolari, ed essere quindi localmente corretto (ad ogni angolo), ma globalmente impossibile. Escher rappresenta qui simultaneamente i tre punti di vista che si ottengono guardando in tre direzioni spaziali fra loro ortogonali (come si può verificare osservando il disegno non solo dal basso in alto, ma anche da destra a sinistra e da sinistra a destra).

[21] Un cubo reversibile è un caso limite del cubo di Necker, visto da una particolare prospettiva.

[22] Ernst Schröder, Über eine optische Inversion, *Annalen der Physik und Chemie*, 181 (1858) 298–311.

[23] Scoperto dall'artista svedese Oscar Reutersvärd nel 1934, e riscoperto da Penrose (figlio) nel 1958 (vedi nota 25).

Un uso spettacolare del triangolo impossibile si ha in *Cascata* (Figura 20), dove esso appare tre volte consecutive nella rappresentazione di un canale che sembra localmente in piano, ma globalmente in salita. Escher crea così l'impressione doppiamente paradossale, da un punto di vista fisico, di un moto perpetuo generato dall'acqua che scorre all'insù. Si noti come l'intera figura sia in realtà la sovrapposizione di due figure separatamente consistenti: due torri (una a tre piani e l'altra a due), ed un canale orizzontale (con i lati due a due perpendicolari).[24]

In *Salire e scendere* (Figura 21) si rappresenta infine la *scala di Penrose (padre)*,[25] in cui un moto perpetuo è generato in modo opposto a quello di *Cascata*: non mediante un percorso in salita che dovrebbe essere in piano, ma da un percorso in piano che dovrebbe essere in salita. Che la scala sia in piano lo si intuisce tenendo l'immagine non perpendicolarmente al campo visivo (come normalmente la si osserva), ma (quasi) parallelamente ad esso.[26] Gli scalini sono in realtà posti uno sull'altro come tegole su un tetto piano, o libri su un tavolo, in modo da formare un quadrilatero: l'illusione deriva dal disegnare come verticali i prolungamenti delle altezze degli scalini, che sono in realtà linee oblique. Poichè però tali prolungamenti vanno in direzioni opposte su lati opposti del quadrilatero, l'edificio si può disegnare solo a metà, ed esso non potrebbe stare in piedi. Paradosso a parte, Escher vide qui una metafora dell'assurdità della vita, non solo del "come è duro calle lo scendere e 'l salir per l'altrui scale" (*Paradiso*, XVII, 59-60), ma anche di quanto tale affanno sia inutile, e non porti in realtà da nessuna parte (p. 99).

In conclusione, possiamo dividire i sei paradossi percettivi usati da Escher in due classi. Tre di essi (il cubo di Necker, i cubi reversibili e la scala di Schröder) sono semplicemente *figure ambigue*, che rappresentano più di un oggetto allo stesso tempo, su cui la percezione oscilla. I rimanenti tre (cubo impossibile, triangolo impossibile e scala di Penrose) sono invece *figure*

[24]Sulle colonne di *Cascata* sono raffigurati due strani poliedri: quello a sinistra è l'intersezione di tre cubi, quello a destra l'intersezione di tre ottaedri irregolari (o, alternativamente, un dodecaedro con facce romboidali stellato).

[25]Lionel e Roger Penrose, Impossible objects: a special type of visual illusion, *British Journal of Psychology*, 49 (1958) 31–33.

[26]Il disegno è dunque un'*anamorfosi*, cioè la rappresentazione distorta di una prospettiva che si vede in modo naturale soltanto guardandola da un'angolazione particolare. L'anamorfosi risale almeno a Leonardo (1485), ed è la tecnica usata per affrescare superfici verticali di grandi dimensioni o cupole, in modo da non fare notare distorsioni.

assurde, che rappresentano un solo oggetto ben definito.

L'assurdità delle figure del secondo gruppo è però di un tipo molto particolare: essa risiede soltanto nella loro interpretazione, e non nel fatto che esse siano rappresentazioni di percezioni impossibili. Richard Gregory ha infatti mostrato[27] come una serie di sbarre due a due perpendicolari (ovviamente formanti non un triangolo chiuso, ma una figura aperta) possa sembrare un triangolo impossibile, se osservata da un particolare punto di vista. Analogamente, un modello di cubo con due lati discontinui può sembrare un cubo impossibile, se osservato da un particolare punto di vista (perchè le discontinuità permettono di vedere lati che stanno in realtà sul retro).

Paradossi logici

L'osservazione di Gregory mostra come i paradossi delle figure assurde siano in realtà di natura *logica*, e non fisica. Essi sono dunque tipici della prima metà del secolo, in particolare della storia che inizia in negativo nel 1902 con il *paradosso di Russell*, e culmina in positivo (almeno per quanto riguarda l'uso dei paradossi) nel 1931 con il *teorema di Gödel*.

L'esempio più venerando e illustre di questo genere di cose è forse il *paradosso del mentitore*, una versione del quale è la seguente:

Questa frase è falsa.

Naturalmente, se la frase fosse vera dovrebbe essere falsa (perchè questo è ciò che essa dice); e se fosse falsa dovrebbe essere vera (perchè questo è il contrario di ciò che essa dice).

Un aspetto fondamentale della frase precedente è l'*autoriferimento*, il fatto cioè che essa parli di se stessa. Tale aspetto è esemplificato, nei disegni di Escher, dalla presenza di un richiamo della figura principale in *Stelle* (Figura 4), del cubo impossibile in *Belvedere* (Figura 17), e dei cubi reversibili sulla bandiera di *Convesso e concavo* (Figura 18).

Un aspetto secondario della frase precedente è invece il fatto che l'autoriferimento sia ottenuto in un solo passo. Gli usi moderni dei paradossi hanno anzi mostrato che è più efficace spezzare l'autoriferimento in due passi, come nel caso della seguente versione del paradosso del mentitore, proposta da

[27] Richard Gregory, *The intelligent eye*, 1970.

Jourdain nel 1913:

La frase successiva è vera. La frase precedente è falsa.

Il fatto che essa sia in realtà l'accostamento inconsistente di due frasi separatamente consistenti ricorda ovviamente le realizzazioni di *Belvedere* (Figura 17) e *Cascata* (Figura 20).

Ma i due passi sono illustrati nel modo più diretto ed efficace in *Mani che disegnano* (Figura 22): in quanto immagine del processo di riflessione di Escher sull'attività del disegnatore, essa è forse anche il simbolo più indovinato di tutto il suo originale lavoro.[28]

[28]La stessa idea, benchè realizzata in modo più schematico e quindi meno impressionante, è stata indipendentemente usata dal disegnatore statunitense Saul Steinberg.

Bibliografia

Riferimenti classici per l'intera opera di Escher:

- Maurits Cornelis Escher, *The graphic work of Escher*, 1960.
- J.L. Locher (curatore), *Il mondo di M.C. Escher*, Garzanti, 1977.
- J.L. Locher (curatore), *M.C. Escher: his life and complete graphic work*, 1981.
- W.J. van Hoorn e F. Wierda (curatori), *Escher on Escher: exploring the infinite*, 1986.

Opere generali sugli aspetti matematici:

- Carolina MacGillavry, *Symmetry aspects of M.C. Escher's periodic drawings*, 1965.
- Arthur Loeb, *Color and symmetry*, 1971.
- Bruno Ernst, *Lo specchio magico di Escher*, Taschen, 1990.
- Doris Schattschneider, *Visioni della simmetria*, Zanichelli, 1992.

Articoli su particolari aspetti matematici, oltre a quelli citati nella nota 13, si trovano nei due libri di Locher, e in:

- Harold Coxeter, Michele Emmer, Roger Penrose e M.L. Teuber (curatori), *M.C. Escher: art and science*, North Holland, 1986.

Infine, un divertimento:

- Doris Schattschneider e Wallace Walker, *Caleidocicli*, 1977.

Indice delle illustrazioni