UN BELL TEOREMA

Piergiorgio Odifreddi

Ottobre 1995

Il teorema di Bell è stato definito "la più profonda scoperta della scienza", o almeno "il più importante sviluppo recente della fisica".[1] Anche senza dover necessariamente condividere l'iperbole, è innegabile che un risultato che abbia permesso lo spostamento del dibattito sui fondamenti della nostra visione del mondo dal campo delle dispute filosofiche a quello delle verifiche sperimentali ha almeno il valore di una parabola sulle potenzialità della ragione. Lasciando ad un altra sede la descrizione del background culturale e storico del teorema,[2] ci limiteremo qui ad una ellissi che dimostri nel modo più elementare possibile una delle tante versioni del celebrato risultato.

La disuguaglianza quadrangolare

La versione che dimostreremo riguarda un esperimento su due sistemi, in cui si effettuino due tipi di misure (A e B) su uno dei sistemi ed altri due tipi di misure (C e D) sull'altro, ciascuna delle quali può dare un risultato positivo ($+$) o negativo ($-$). Le misure vengono eseguite ripetutamente, in quantità tale da avere rilevanza statistica. Ed esse si dicono correlate quando diano lo stesso risultato (cioè o due $+$ o due $-$).

Indicheremo con $p(xy|ij)$ la probabilità che, effettuando le misure i sul primo sistema e j sul secondo, i risultati siano rispettivamente x ed y (ovviamente, i potrà dunque essere A o B, j potrà essere C o D, e sia x che y avranno valori $+$ o $-$). Le probabilità $p(x|i)$, $p(x|ij)$, $p(x|ijy)$ e quelle con y al posto di x sono definite in modo analogo.

[1] Rispettivamente da Henry Stapp, "Are superluminar connections necessary?", *Nuovo Cimento*, 40 (1977) 191–204, e da Brian Josephson, premio Nobel per la fisica nel 1973.

[2] Vedi *Per chi suona la campana*.

L'ipotesi fondamentale del teorema di Bell, su cui discuteremo in seguito, è la seguente.

Assioma 1 Fattorizzabilità. *I risultati degli esperimenti nei due sistemi sono indipendenti:*

$$p(xy|ij) = p(x|i) \cdot p(y|j).$$

La versione del teorema di Bell che ci interessa è la seguente.

Teorema 2 Disuguaglianza quadrangolare. *Se vale la fattorizzabilità, allora la mancanza di correlazione in uno dei possibili tipi di misura non può eccedere la mancanza di correlazione nei rimanenti tre tipi. Ad esempio,*

$$\begin{array}{ccccc} p(+-|AC) & + & p(-+|AC) & \leq \\ p(+-|AD) & + & p(-+|AD) & + \\ p(+-|BD) & + & p(-+|BD) & + \\ p(+-|BC) & + & p(-+|BC). & \end{array}$$

Dimostrazione. Per la fattorizzabilità, la disuguaglianza quadrangolare diventa

$$\begin{array}{ccccc} p(+|A)\cdot p(-|C) & + & p(-|A)\cdot p(+|C) & \leq \\ p(+|A)\cdot p(-|D) & + & p(-|A)\cdot p(+|D) & + \\ p(+|B)\cdot p(-|D) & + & p(-|B)\cdot p(+|D) & + \\ p(+|B)\cdot p(-|C) & + & p(-|B)\cdot p(+|C). & \end{array}$$

Per comodità di scrittura, scriviamo a^+ al posto di $p(+|A)$, e analogamente negli altri casi. Otteniamo allora

$$a^+c^- + a^-c^+ \leq a^+d^- + a^-d^+ + b^+d^- + b^-d^+ + b^+c^- + b^-c^+.$$

Poichè la misura a dà sempre risultato positivo o negativo, $a^+ + a^- = 1$: possiamo allora ulteriormente semplificare la scrittura scrivendo a al posto di a^+, $1-a$ al posto di a^-, e analogamente negli altri casi. Si ottiene così

$$a(1-c)+(1-a)c \leq a(1-d)+(1-a)d+b(1-d)+(1-b)d+b(1-c)+(1-b)c,$$

che si riduce a

$$ad + bd + bc \leq ac + b + d.$$

Poichè $b, d \leq 1$ ciò equivale a

$$ad + bd + bc - ac \leq 2,$$

ossia a

$$a(d - c) + b(d + c) \leq 2.$$

La verifica di questa disuguaglianza è ora immediata, in entrambi i casi possibili:

- Se $d - c \leq 0$ allora $a(d - c) \leq 0$, perchè $a \geq 0$. Inoltre $b(d + c) \leq d + c$, perchè $d \leq 1$. Dunque

  $$a(d - c) + b(d + c) \leq d + c \leq 2,$$

  perchè $d, c \leq 1$.

- Se $d - c \geq 0$ allora $a(d - c) \leq d - c$, perchè $a \leq 1$. Dunque

  $$a(d - c) + b(d + c) \leq (d - c) + (d + c) = 2d \leq 2,$$

  perchè $d, c \leq 1$. $\square$

Analisi dell'ipotesi

Seguendo Jon Jarrett,[3] è possibile *scomporre* l'ipotesi di fattorizzabilità nella congiunzione di due condizioni distinte.

Assioma 3 Separabilità. *I risultati (statistici) di un esperimento sono indipendenti dai risultati dell'altro:*

$$p(x|ijy) = p(x|ij) \qquad \textit{and} \qquad p(y|ijx) = p(y|ij).$$

La separabilità è una conseguenza del principio secondo cui la separazione spazio-temporale di due sistemi è una condizione sufficiente affinchè essi si possano considerare distinti, e dunque che lo stato del sistema composto da entrambi sia riducibile agli stati dei due sistemi singoli ("il tutto è uguale alla somma delle sue parti").

[3] Jon Jarrett, "On the physical significance of the locality condition in the Bell argument", *Noûs*, 18 (1984) 569–589.

Assioma 4 Località. *I risultati di un esperimento sono indipendenti dal tipo di misura effettuato nell'altro:*

$$p(x|ij) = p(x|i) \qquad e \qquad p(y|ij) = p(y|j).$$

La località è una conseguenza del principio secondo cui la separazione spazio-temporale di due sistemi è una condizione sufficiente affinchè essi non possano interagire istantaneamente, e dunque che lo stato di ciascun sistema sia indipendente dallo stato dell'altro ("nessuna azione a distanza").

Proposizione 5 *La fattorizzabilità segue dalla separabilità e dalla località.*

Dimostrazione. Basta notare che

$$\begin{aligned} p(xy|ij) &= p(x|ijy) \cdot p(y|ij) && \text{per definizione di probabilità} \\ &= p(x|ij) \cdot p(y|ij) && \text{per la separabilità} \\ &= p(x|i) \cdot p(y|j) && \text{per la località.} \quad \square \end{aligned}$$

Procedendo in una direzione diversa, è anche possibile *sostituire* l'ipotesi di fattorizzabilità mediante una assunzione classica della teoria della probabilità.

Assioma 6 Additività. *Le probabilità di eventi composti sono le somme delle probabilità di eventi atomici indipendenti.*

Proposizione 7 *La disuguaglianza quadrangolare segue dall'additività.*

Proof. I quattro tipi di misura ed i due tipi di risultati generano 16 tipi di eventi atomici, che si possono ad esempio indicare con una quadrupla di $+$ e $-$ (corrispondenti alle misure A, B, C e D, nell'ordine). Ad esempio, $p(+--+)$ sarà allora la probabilità che i risultati delle misure A e D siano positivi, e quelli delle misure B e C siano negativi.

Dall'ipotesi di additività segue ad esempio che

$$p(+-|AC) = p(++-+) + p(++--) + p(+--+) + p(+---),$$

e analogamente negli altri casi. E la disuguaglianza quadrangolare segue semplicemente dal fatto che i 24 casi a destra coprono gli 8 casi a sinistra, come si può facilmente verificare. $\square$

L'implicazione quadrangolare

L'ultima proposizione è apparentemente un risultato di probabilità dimostrato per forza bruta, ma in realtà essa è la conseguenza di un principio logico indipendente.

Assioma 8 Distributività. *La congiunzione logica è distributiva rispetto alla disgiunzione:*

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \;\Rightarrow\; (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$$

Considerando le probabilità come possibili valori di verità di proposizioni, possiamo scrivere A e $\neg A$ al posto di $p(+|A)$ e $p(-|A)$, e analogamente negli altri casi. Le operazioni algebriche sui valori di verità possono allora essere interpretate come operazioni logiche nel modo solito, scrivendo cioè $\vee$, $\wedge$ e $\Rightarrow$ al posto di $+$, $\cdot$ e $\leq$. Si ottiene così la seguente forma logica della disuguaglianza quadrangolare.

Teorema 9 Implicazione quadrangolare. *Se vale la distributività, allora*

$$\begin{array}{ll} (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C) & \Rightarrow \\ (A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) & \vee \\ (D \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge B) & \vee \\ (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C). & \end{array}$$

Dimostrazione. Per la distributività,

$$\alpha \wedge (\neg\beta \vee \beta) \;\Rightarrow\; (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta).$$

Ponendo $\alpha = X \wedge \neg Y$ e $\beta = Z$, si ottiene

$$(X \wedge \neg Y) \wedge (\neg Z \vee Z) \;\Rightarrow\; (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z),$$

e dunque

$$(X \wedge \neg Y) \;\Rightarrow\; (X \wedge \neg Z) \vee (Z \wedge \neg Y).$$

Da una doppia applicazione (prima ad A, C e D, e poi a C, D e B) del principio appena dimostrato segue

$$(A \wedge \neg C) \;\Rightarrow\; (A \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C),$$

e analogamente

$$(\neg A \wedge C) \;\Rightarrow\; (\neg A \wedge D) \vee (\neg D \wedge B) \vee (\neg B \wedge C).$$

Le due conclusioni insieme dimostrano appunto l'enunciato. $\square$

Prolegomeni ad ogni fisica futura

Poichè la disuguaglianza e l'implicazione quadrangolari non sono verificate in condizioni sperimentali, in cui è possibile ad esempio avere

$$\begin{aligned} p(+-|AC)+p(-+|AC) &= 85\% \\ p(+-|AD)+p(-+|AD) &= 15\% \\ p(+-|BD)+p(-+|BD) &= 15\% \\ p(+-|BC)+p(-+|BC) &= 15\%, \end{aligned}$$

le loro ipotesi sono empiricamente false.

Dalla falsità dell'ipotesi di fattorizzabilità segue che nessuna teoria che soddisfi entrambi i principi di separabilità e località è adeguata per una descrizione corretta del mondo fisico in generale, e dei fenomeni del tipo di quelli considerati dal teorema di Bell in particolare.

La rinuncia al *principio di località* comporta la necessità di una revisione o di un abbandono della teoria della relatività, da cui esso discende. La rinuncia al *principio di separabilità* comporta invece la necessità di abbracciare una visione olistica del mondo ("il tutto è maggiore della somma delle sue parti"). Nessuna delle due scelte è dunque indolore, ma la seconda sembra meno traumatica (oltre che in accordo con gli assunti della meccanica quantistica).

Il teorema di Bell mostra inoltre che è necessario abbandonare in ogni caso il *principio di causalità*, almeno nella forma enunciata da Reichenbach:[4] se due eventi sono correlati (non indipendenti), allora esiste una loro causa comune (un evento nel loro passato rispetto a cui essi risultano indipendenti). Le condizioni sperimentali che falsificano la disuguaglianza di Bell sono infatti un controesempio del principio: gli eventi non possono essere indipendenti rispetto a nessuna causa comune, perchè altrimenti varrebbero rispetto ad essa il principio di fattorizzabilità, e dunque appunto la disuguaglianza di Bell.[5] Per spiegare tali correlazioni non causali Jung e Pauli hanno proposto di affiancare al principio di causalità un *principio di sincronicità*, ad esso complementare e come questo primitivo.

[4] Hans Reichenbach, *The direction of time*, University of California Press, 1956. Questa formulazione era stata esplicitamente formulata in modo da non richiedere assunzioni di *determinismo*, ed essere quindi compatibile con la meccanica quantistica.

[5] Per inciso, la precedente refutazione *sperimentale* del principio di causalità fa giustizia anche di un (tuttora) popolare assunto kantiano: che si possa sempre postulare la mera *esistenza* di una spiegazione causale per qualunque serie di eventi, e che solo spiegazioni causali *specifiche* possano avere conseguenze sperimentali.

Il fatto che la disuguaglianza quadrangolare si possa derivare, oltre che dall'assioma di fattorizzabilità, dal *principio di additività* mostra che anche la teoria delle probabilità classica, nella forma sviluppata da Kolmogorov[6] è inadeguata per il trattamento della fisica quantistica. Più precisamente, nessun assegnamento di probabilità agli eventi atomici può generare la probabilità di eventi composti in modo da concordare con l'esperienza.

In termini logici, invece che probabilistici, il ragionamento precedente si può riformulare come un attacco alla logica classica: esso mostra infatti che è impossibile applicare al discorso sul mondo fisico il *principio di vero-funzionalità*, secondo cui i valori di verità delle proposizioni composte dipendono soltanto dai valori di verità delle proposizioni atomiche che le compongono. Oltre che a livello atomico, la logica classica si rivela poi inadeguata anche a livello proposizionale, come mostra il fallimento della *proprietà distributiva*.

In conclusione, si può quindi sostenere che l'ingenua disuguaglianza quadrangolare si sia rivelata essere un *casus Belli* sufficiente per intraprendere una vera e propria guerra contro le assunzioni metafisiche, epistemologiche, matematiche e logiche che sembrano ancora dominare la nostra visione del mondo.

[6] Andrei Kolmogorov, *Fondamenti della teoria della probabilità*, 1933.