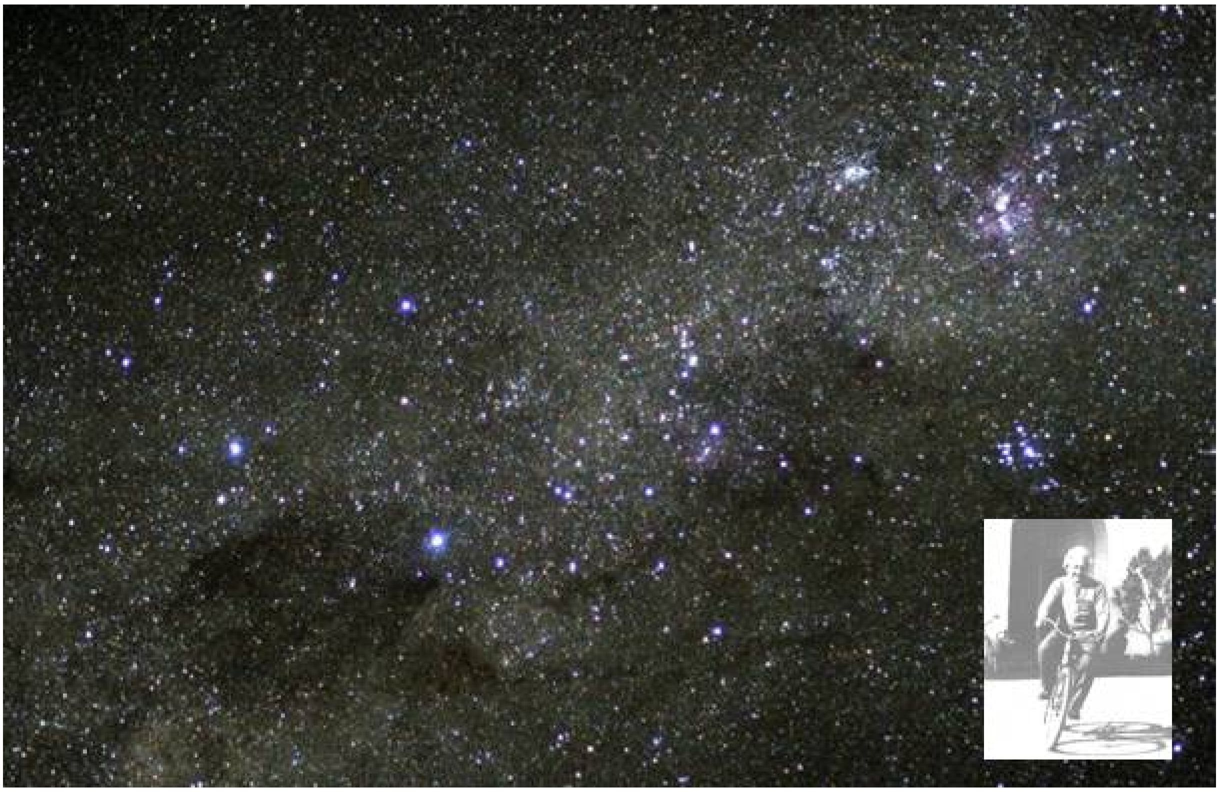
PHILOSOPHIAE NATURALIS
FINIS MATHEMATICA

Piergiorgio Odifreddi



L'uso della matematica nella descrizione dell'universo è il lascito duraturo dei pitagorici: essi lo estrapolarono coraggiosamente da alcune osservazioni sulla musica, e le tracce di questa origine storica rimangono tuttora nell'espressione "armonia delle sfere".

Nello *Scholium* classico alla proposizione VIII del libro III dei *Principia*, Newton attribuisce a Pitagora stesso addirittura la legge di gravitazione universale, o almeno la parte di essa secondo cui la forza gravitazionale esercitata da un corpo è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza. Mediante esperimenti con pesi attaccati a nervi di buoi, Pitagora avrebbe infatti determinato che la frequenza del suono prodotto da una corda tesa pizzicata è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda, e direttamente proporzionale alla radice della tensione (in altre parole, per raddoppiare la frequenza si deve dimezzare la lunghezza della corda, o quadruplicarne la tensione): dal che si deduce immediatamente che la tensione è proporzionale all'inverso del quadrato della lunghezza.

Naturalmente, un conto è parlare metaforicamente del sistema solare come di una lira (suonata da Apollo) le cui corde collegano il sole ai pianeti, e della forza gravitazionale esercitata dal sole come della tensione della corda, ed un'altro è postulare che la stessa legge che lega tensione e lunghezza nella lira debba legare forza gravitazionale e distanza. A ben pensare, anzi, non si vede che cosa ci possa essere di comune nella lira e nel sistema solare: l'ipotesi che le leggi dell'universo siano universali e matematiche è metafisica bella e buona, benchè su di essa si fondi la scienza moderna.

L'espressione più nota di questa metafisica fu formulata da Galileo, ne *Il Saggiatore* (6):

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Per dare subito il buon esempio, Galileo trasse da un argomento puramente matematico una conseguenza genuinamente epistemologica, scartando la sua prima formulazione della legge della caduta dei gravi, cioè che la velocità fosse proporzionale alla distanza percorsa ($v = ax$): dalla soluzione dell'equazione differenziale ($x = b\, e^{at}$) risulta infatti che un grave in quiete ($x = 0$) non potrebbe mai incominciare a cadere (perchè l'esponenziale non è mai nullo).[1]

[1] Galileo formulò poi la legge corretta, cioè che la velocità è proporzionale al tempo passato ($v = at$), la cui soluzione ($x = \frac{at^2}{2}$) permette al grave di partire da uno stato di quiete (perchè $x = 0$ per $t = 0$).

L'espressione classica più compiuta della matematizzazione della natura sono invece ovviamente i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* di Newton, che a lungo sono stati considerati una edizione riveduta e corretta del libro di cui parlava Galileo.[2] Il loro risultato più tipico fu la derivazione delle leggi di Keplero sul moto dei pianeti dagli assiomi della meccanica: un procedimento di 'giustificazione' teoretica di leggi empiriche che sarebbe divenuto un modello di sviluppo per il futuro.

Insieme agli sviluppi tecnici della fisica teorica, che hanno portato ad una sostanziale dissoluzione di questa nella matematica, anche la generica metafisica di Pitagora e Galileo si è raffinata. Ad esempio, Einstein individuava nella *semplicità logica* (a priori) il fattore decisivo per la scelta degli assiomi:

> L'evoluzione procede nella direzione di una crescente semplicità dei fondamenti logici. Per avvicinarci sempre più a questa meta, dobbiamo accettare il fatto che i fondamenti logici si allontanino sempre più dai fatti dell'esperienza, e che il cammino del nostro pensiero dalle basi fondamentali a questi teoremi derivati, riferentisi all'esperienza sensoriale, diventi sempre più difficile e lungo.[3]

Per Dirac era invece la *bellezza matematica* (a posteriori) a giustificare la rilevanza fisica di una teoria:

> Il metodo consiste nel cominciare da un branca della matematica che si pensa formerà la base del nuovo lavoro. In questa scelta si dovrebbe essere fortemente influenzati da considerazioni sulla bellezza della matematica. Si tratta di una qualità che non può essere definita, non più di quanto la bellezza possa essere definita per l'arte, ma che chi studia matematica, di solito, non ha difficoltà ad apprezzare.[4]

Naturalmente, criteri quali la semplicità logica e la bellezza matematica non spiegano certo, e rendono anzi più sorprendente, ciò che Eugene Wigner (premio Nobel nel 1963) chiamava "l'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali". Il nostro scopo qui non è comunque cercare di comprendere il miracolo ma solo di testimoniarlo, mostrando come poche considerazioni elementari bastino effettivamente a derivare le più famose equazioni della relatività e della meccanica quantistica, che hanno fruttato una buona parte dei premi Nobel per la fisica nella prima metà del secolo, e sono appunto culminate nei lavori di Einstein e Dirac.

[2] Per completare la sua opera Newton si dedicò in seguito ad una analoga revisione dell'altro libro dello stesso Autore (la *Bibbia*), ma con minore successo.

[3] Albert Einstein, "Fisica e realtà", in *Opere scelte*, Bollati Boringhieri, 1988, p. 562.

[4] Paul Dirac, "The relation between mathematics and physics", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 59 (1939) 122.

1 Le due rivoluzioni

L'ordine politico ottocentesco è stato sovvertito agli inizi del secolo XX dalle due rivoluzioni russe, nel 1905 e nel 1917. Per una curiosa coincidenza, o forse una insospettabile complicità (Einstein e Lenin vivevano all'epoca entrambi in Svizzera),[5] anche l'ordine scientifico ottocentesco è stato sovvertito dalle due rivoluzioni relativistiche, nel 1905 e nel 1916.

Michelson e Morley 1887: la velocità della luce

Nel giugno 1894 Albert Michelson descrisse concisamente ciò che a suo parere rimaneva da fare nella fisica: "calcolare la sesta cifra decimale" e, presumibilmente, chiudere bottega. Per ironia della sorte, proprio lui aveva già effettuato l'esperimento che avrebbe segnato l'inizio della teoria della relatività.

Supponiamo di avere due specchi, posti alla stessa distanza l da una sorgente di luce, ma in due direzioni perpendicolari: se il sistema sorgente-specchi si muove con velocità v in una delle due direzioni, allora la luce dovrebbe impiegare più tempo a ritornare al punto di partenza lungo il percorso parallelo al moto, che lungo quello perpendicolare.

Infatti, se t_1 e t_2 sono i tempi impiegati lungo il percorso parallelo, rispettivamente in andata e ritorno, dal fatto che la luce rincorre lo specchio in andata, ed è rincorsa dalla sorgente al ritorno, si ha

$$l + vt_1 = ct_1 \qquad \text{e} \qquad l - vt_2 = ct_2,$$

da cui

$$t_1 + t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Se t_3 è il tempo percorso, in andata o in ritorno, lungo il percorso perpendicolare, la distanza percorsa (che in entrambi i casi[6] è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui lati sono rispettivamente la distanza dello specchio, cioè l, e la distanza di cui lo specchio si è mosso, cioè vt_3) è invece due volte

$$\sqrt{l^2 + (vt_3)^2} = ct_3,$$

[5] Per curiosità, Einstein scrisse nel 1929: "rendo omaggio a Lenin come a colui che ha dedicato tutte le sue forze alla realizzazione della giustizia sociale, sacrificando a questo fine la propria individualità" (vedi Abraham Pais, *Sottile è il signore*, Boringhieri, 1986, p. 24).

[6] Si usa qui l'ipotesi, *scorretta* sia classicamente che relativisticamente, che gli angoli di incidenza e di riflessione rispetto ad uno specchio in movimento siano gli stessi. Una trattazione corretta sarebbe più complicata, ma porterebbe a risultati analoghi. Siamo quindi in presenza di ciò che Eliot ha descritto, in *Murder in the cathedral*, come "the greatest treason: to do the right thing for the wrong reason".

da cui

$$2t_3 = \frac{2l}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Misurando entrambi i tempi $t_1 + t_2$ e $2t_3$ si può dunque calcolare

$$\frac{2t_3}{t_1+t_2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

ottenendo in particolare la velocità v della sorgente.

Michelson voleva determinare in tal modo la velocità della terra, e nel 1887 effettuò un famoso esperimento insieme a Edward Morley, trovando però un risultato sorprendente: i raggi di luce che partivano nello stesso istante, arrivavano nello stesso istante!

Michelson pensò semplicemente che qualcosa era andato storto: egli considerò l'esperimento un fallimento, rispetto al suo obiettivo dichiarato, e non lo menzionò neppure nel discorso di accettazione del premio Nobel nel 1907 (che gli venne assegnato per altri motivi, e fu il primo ottenuto da un americano).

Da FitzGerald 1889 a Poincaré 1905: alla ricerca dello spazio e del tempo perduti

Il primo a prendere seriamente i risultati dell'esperimento di Michelson e Morley fu George FitzGerald nel 1889, seguito a ruota da Hendrik Lorentz nel 1892. Essi proposero indipendentemente una soluzione al dilemma ovvia, ma balzana: supporre che la lunghezza l si fosse accorciata nella direzione del moto (ma non in quella perpendicolare), e proprio del fattore mancante!

In altre parole, una distanza che appare di lunghezza l' ad un osservatore sul sistema in movimento, dovrebbe apparire di lunghezza contratta

$$\boxed{l = l' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ad un osservatore esterno: in tal caso, tutto si sistemerebbe nella formula per $t_1 + t_2$.

Simmetricamente, FitzGerald e Lorentz avrebbero potuto dire che un tempo che appare di durata t' ad un osservatore sul sistema in movimento, dovrebbe apparire di durata dilatata

$$\boxed{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

ad un osservatore esterno. L'osservatore sul sistema crede infatti che il raggio di luce percorra una distanza $2l'$, e che impieghi dunque un tempo pari a $2t'_3 = \frac{2l'}{c}$, che va confrontato col tempo $2t_3$ calcolato dall'osservatore esterno (ricordando che, nella direzione perpendicolare al moto, $l' = l$).

Tradurre i fattori correttivi di distanze e tempi in più generali trasformazioni di coordinate, è meno immediato. O meglio, si trova facilmente la trasformazione delle lunghezze, perchè da

$$x = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$

segue immediatamente

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ma le formule per il tempo e la velocità sono più complicate. Mentre le trasformazioni per x e t furono trovate da Woldemar Voigt nel 1887, Joseph Larmor nel 1898 e Lorentz nel 1899, quella per u dovette attendere Poincaré ed Einstein nel 1905, anche se oggi esse vengono tutte chiamate *trasformazioni di Lorentz*:

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.}$$

Hendrik Lorentz aveva già ottenuto il premio Nobel nel 1902, e fu in seguito varie volte proposto per un secondo premio insieme ad Einstein per la relatività: premio che non fu mai assegnato (lo stesso Einstein lo ottenne per l'effetto fotoelettrico). Anche Poincaré fu proposto, ma nel suo caso il premio venne rifiutato per il timore di creare un cavallo di Troia che avrebbe permesso ai matematici future razzie:[7] a riprova del fatto che era già ben chiaro, agli inizi del '900, che la fisica si stava dissolvendo nella matematica.

[7] Oggi è avvenuto il contrario: le medaglie Fields per la matematica vengono assegnate per lavori di fisica teorica, ad esempio ad Alain Connes nel 1983 e a Erward Witten nel 1990.

Einstein 1905: il principio di relatività

L'ipotesi della contrazione delle distanze e della dilatazione dei tempi era di natura puramente cospiratoria: le grandezze si modificano esattamente delle quantità necessarie a far funzionare gli esperimenti. Benchè Poincaré sostenesse che le leggi di natura non sono appunto altro che cospirazioni universali, la situazione era insoddisfacente.

Il rimedio fu trovato nel 1905 da Einstein: egli derivò le trasformazioni di Lorentz da un'analisi puramente fenomenologica delle misure di spazio e tempo effettuate da osservatori mediante metri ed orologi.

Il punto di partenza di Einstein fu il *principio di relatività* che, ironicamente, stabilisce alcuni assoluti. Precisamente:

1. lo spazio vuoto ed immobile appare a ciascun osservatore come tridimensionale ed euclideo;
2. osservatori in moto rettilineo uniforme relativo sono reciproci e somiglianti;
3. se due osservatori sono ciascuno in moto rettilineo uniforme rispetto ad un terzo osservatore, lo sono anche fra loro.

Dati due osservatori $A(x,t)$ e $B(x',t')$ in moto rettilineo uniforme, ciascuno in possesso di metri che avevano la stessa misura quando A e B coincidevano, consideriamo due misure di tempo effettuate da A:

- il tempo necessario affinchè uno stesso estremo del metro di B passi dinanzi ai due estremi del metro di A, che determina la velocità v di B misurata da A;
- il tempo necessario affinchè i due estremi del metro di B passino dinanzi ad uno stesso estremo del metro di A, che determina (moltiplicato per v) la lunghezza λ del metro di B misurata da A.

Consideriamo ora un punto C, in moto rettilineo uniforme con velocità u rispetto ad A e u' rispetto a B, nella stessa direzione del moto relativo di A e B (cioè di v). Per la condizione 1 del postulato di relatività, da

$$AC = AB + BC$$

segue che

$$x = vt + \lambda x',$$

e dunque

$$x' = \frac{x - vt}{\lambda} \qquad \text{e} \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{u - v}{\lambda}\cdot$$

Simmetricamente, per la condizione 2 del postulato di relatività,

$$x' = -vt' + \lambda x.$$

Dalle due espressioni per x', si ottiene

$$-vt' + \lambda x = \frac{x - vt}{\lambda},$$

e dunque

$$t' = \frac{1}{\lambda}\left(t + \frac{\lambda^2 - 1}{v} \cdot x\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2 - 1}{v} \cdot u\right).$$

Dalle due derivate si ha

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{u - v}{1 + \frac{\lambda^2 - 1}{v} \cdot u}.$$

Consideriamo ora C come secondo osservatore, e B come punto mobile in A e C. Per la condizione 3 del postulato di relatività, si può scrivere

$$-u' = \frac{v - u}{1 + \frac{\mu^2 - 1}{u} \cdot v},$$

dove μ è la lunghezza del metro di C, misurata da A.

Dalle due espressioni per u' si ottiene

$$\frac{1 - \lambda^2}{v^2} = \frac{1 - \mu^2}{u^2} = \text{costante} = \frac{1}{c^2},$$

per qualche c. Da

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

seguono allora le trasformazioni di Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Ponendo $u = c$ si ottiene $u' = c$. Viceversa, da $u = u'$ segue che $u = c$. Dunque *la velocità c è (la sola) invariante* rispetto ad osservatori in moto rettilineo uniforme.

Fino a questo punto non si è fatta nessuna ipotesi sul valore di λ, e si può ricadere nel caso classico semplicemente ponendo $\lambda = 1$: allora $c = \infty$, ed essa non è dunque una velocità fisicamente realizzabile.

L'ipotesi relativistica è invece che $\lambda < 1$, e quindi che c sia una quantità reale finita: le trasformazioni implicano allora che un osservatore misuri una *contrazione delle lunghezze* (perchè λ determina la lunghezza unitaria di B misurata da A), e una *dilatazione dei tempi* (perchè l'inverso di λ determina il tempo unitario di B misurato da A) in sistemi che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto a lui.[8]

Il valore della costante c deve essere determinato sperimentalmente, e in accordo con gli esperimenti di Michelson-Morley è naturale (anche se non necessario) postulare che c sia la velocità della luce nel vuoto. In tal caso la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi sono esattamente quelle ipotizzate da FitzGerald e Lorentz.

Einstein 1905: l'equivalenza di massa ed energia

Dopo gli sviluppi descritti, la fisica si trovò costretta a scegliere fra Barabba e Gesù o, meno metaforicamente, fra Newton e Maxwell: le equazioni della meccanica sono infatti lasciate invariate dalle trasformazioni di Galileo ma non da quelle di Lorentz, mentre per le equazioni dell'elettromagnetismo succede il contrario.[9] Uno dei due insiemi di equazioni andava dunque cambiato, in modo che entrambi risultassero invariati rispetto allo stesso tipo di trasformazioni, ed Einstein scelse di cambiare il primo.

In particolare, la seconda legge di Newton è in aperto contrasto con l'esistenza di una velocità massima: se infatti si applica ad un corpo una forza costante nel tempo, essa provoca un aumento costante della velocità. Einstein trovò però una semplice soluzione al dilemma, basata su una *dilatazione delle masse* uguale a quella dei tempi. Se infatti

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},}$$

dove m_0 è la massa a riposo del corpo (cioè la massa misurata in un sistema in cui la velocità del corpo è nulla), una forza costante non provoca più un aumento indefinito della velocità: col crescere della velocità, e dunque della massa, decresce l'effetto della forza, e dunque l'aumento della velocità.

La dilatazione delle masse, che dimostreremo in seguito, ha sorprendenti conseguenze. Usando infatti il teorema del binomio di Newton per approssimare

[8] È anche possibile supporre che $\lambda > 1$, e quindi che c sia una quantità immaginaria: come nel caso classico, c non è dunque fisicamente realizzabile; e, simmetricamente al caso relativistico, le trasformazioni implicano ora una *dilatazione delle lunghezze* e una *contrazione dei tempi*.

[9] Volendo, le trasformazioni di Lorentz si possono derivare in maniera alternativa richiedendo appunto che esse lascino invariate le equazioni di Maxwell. Anzi, questo fu proprio il modo in cui esse vennero originariamente derivate, da Voigt ad Einstein.

il fattore di dilatazione, si ottiene

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 (1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}) = m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2},$$

cioè

$$mc^2 \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2},$$

o

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Un aumento della massa equivale dunque ad un'energia, con un fattore di proporzionalità enorme (c^2). In particolare, se m è la massa di un atomo di uranio, ed m_0 la massa degli atomi in cui esso si disintegra in un'esplosione atomica, allora $(m - m_0)c^2$ misura l'energia liberata: questa formula fu effettivamente usata nel 1944 per una stima della potenza della prima bomba atomica, sei mesi prima del test nel deserto del Nevada, e diede risultati in accordo con la potenza che fu poi misurata direttamente nel test.

La relazione precedente fra massa ed energia viene di solito concisamente descritta da quella che è certo la formula più famosa del secolo, e forse della storia:

$$\boxed{E = mc^2,}$$

e l'espressione $m_0 c^2$ viene chiamata energia a riposo.

Mettendo insieme le espressioni per l'energia e la quantità di moto (definita nel modo solito, come $p = mv$), si ottiene

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4,$$

da cui si deriva l'energia di un corpo di massa a riposo m_0 e quantità di moto p:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

che ci verrà utile in seguito.

Nel 1946, quarant'anni dopo la sua prima derivazione, Einstein tornò sulla formula dell'equivalenza tra massa ed energia per dimostrarla in maniera diretta, senza usare la dilatazione della massa. Questa volta suppose che sul corpo di massa a riposo m_0 venissero inviati due raggi di luce di energia $\frac{E}{2}$, simmetrici ed opposti: secondo la teoria classica essi hanno entrambi quantità di moto $\frac{E}{2c}$, ma essendo simmetrici ed opposti non modificano lo stato di quiete del corpo.

In un sistema esterno, rispetto al quale il corpo appare muoversi con velocità v, i raggi di luce appaiono invece deviati di un angolo $\frac{v}{c}$, e ciascuno di essi contribuisce una quantità di moto pari a

$$\frac{E}{2c} \cdot \sin\left(\frac{v}{c}\right) \approx \frac{E}{2c} \cdot \frac{v}{c} = \frac{Ev}{2c^2}.$$

La quantità di moto totale misurata nel sistema esterno è dunque

$$m_o v + \frac{Ev}{c^2}.$$

E poichè nel sistema esterno il corpo continua ad avere velocità v, perchè nel sistema in quiete i due raggi si annullano e il corpo non si muove, dev'essere

$$mv = m_o v + \frac{Ev}{c^2}$$

per una nuova massa m. Eliminando v, si ottiene come prima

$$(m - m_0)c^2 = E.$$

Minkowski 1908: lo spazio-tempo ritrovato

Spazio e tempo ricevono un trattamento simmetrico nella relatività, evidenziato dalla forma che le trasformazioni di Lorentz acquistano quando si pone $c = 1$, il che si può fare con un cambiamento delle unità di misura (misurando ad esempio il tempo in anni, e lo spazio in anni-luce[10]):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Minkowski notò nel 1908 che, considerando x e t (o ct, se si continua ad usare c) come le coordinate in un piano cartesiano di un punto, detto *evento* per sottolinearne il carattere sia spaziale che temporale, si ha

$$(t')^2 - (x')^2 = t^2 - x^2,$$

cioè

$$\boxed{t^2 - x^2 = \text{costante.}}$$

[10]Si può anche misurare direttamente lo spazio in secondi, chiamando secondo-spazio lo spazio percorso dalla luce in un secondo-tempo, cioè $3 \cdot 10^8$ metri. O misurare il tempo in metri, chiamando metro-tempo il tempo impiegato dalla luce per percorrere un metro-spazio, cioè $\frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ secondi.

Più in generale, dati due eventi (x_1, t_1) e (x_2, t_2) si ha

$$(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = \text{costante},$$

che definisce dunque una quantità invariante rispetto a cambiamenti di coordinate, interpretabile (in analogia con la geometria euclidea) come l'*intervallo spazio-temporale* fra i due eventi:

$$s = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2}.$$

Mentre le distanze spaziali subiscono contrazioni, e le durate temporali dilatazioni, gli intervalli spazio-temporali rimangono invariati: il carattere assoluto che spazio e tempo avevano isolatamente nella fisica classica, e che hanno perduto nella relatività, viene così riacquistato dallo *spazio-tempo*, la cui geometria è iperbolica (a causa dell'equazione precedente fra t ed x, che definisce appunto un'iperbole).

Poichè spazio e tempo non si possono più considerare separatamente in relatività, a causa della loro interdipendenza mostrata dalle equazioni di Lorentz, le nozioni fisiche classiche che si riferiscono solo ad uno di essi devono essere riformulate in termini di spazio-tempo.

Un esempio è dato dalla quantità di moto, che classicamente viene definita come

$$p = m_0 v = m_0 \cdot \frac{dx}{dt}.$$

La sostituzione relativistica della derivata temporale con una derivata spazio-temporale si ottiene dalla formulazione infinitesimale dell'intervallo:

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2,$$

da cui si ha

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 - v^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - v^2}.$$

La quantità di moto relativistica viene dunque definita come

$$p = m_0 \cdot \frac{dx}{ds} = m_0 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

La dilatazione delle masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}},$$

diventa dunque semplicemente una definizione necessaria per ridurre la nozione relativistica di quantità di moto a quella classica:

$$p = mv$$

(o, alternativamente, esprime l'invarianza della quantità di moto).

Quantità di moto ed energia, che nella fisica classica sono legate dalla relazione

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

nella relatività sono legate dalla relazione (vista nel paragrafo precedente)

$$E^2 - p^2c^2 = \text{costante},$$

che per $c = 1$ diventa

$$\boxed{E^2 - p^2 = \text{costante.}}$$

Essa è dello stesso tipo di quella fra spazio e tempo, il che fa indovinare da un lato che per quantità di moto ed energia valgano trasformazioni analoghe a quelle di Lorentz, cioè

$$p' = \frac{p - vE}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - v^2}},$$

il che si può facilmente verificare, e dall'altro che a quantità di moto ed energia separati vada sostituita una nuova quantità *quantità-di-moto-energia*, analoga allo spazio-tempo, e per la quale vale un principio di conservazione relativistico che è la combinazione dei due principi di conservazione classici di quantità di moto ed energia.

Einstein 1916: gravitas ordine geometrico demonstrata

La teoria della relatività del 1905 lasciava aperti due ordini di problemi. Internamente, il ruolo privilegiato assegnato ai moti rettilinei uniformi era arbitrario, e si sarebbero dunque dovute trovare trasformazioni che lasciassero invariate le leggi della fisica anche rispetto a moti accelerati. Esternamente, era necessaria una modifica non soltanto della meccanica, già ottenuta, ma anche della teoria newtoniana della gravitazione, in almeno due modi: da un lato, le derivate temporali andavano sostituite con derivate spazio-temporali (come già per la quantità di moto p), dall'altro la forza gravitazionale istantanea andava sostituita con una forza che si trasmettesse a velocità non superiore a c.

Meditando sul famoso esperimento di caduta dei gravi effettuato (se mai lo fu) da Galileo sulla torre di Pisa, che mostrava come la massa inerziale m_i di un corpo (che misura la resistenza al moto) fosse uguale alla sua massa gravitazionale m_g (che misura la reazione all'attrazione), Einstein enunciò un *principio di equivalenza*, che permetteva di vedere i due problemi precedenti come uno solo: moti uniformemente accelerati e campi gravitazionali sono localmente indistinguibili, e basta dunque concentrarsi sul problema di una formulazione relativistica della gravitazione.

Consideriamo infatti la forza gravitazionale generata da una massa M a distanza r dal corpo:

$$m_i a = g \frac{m_g M}{r^2}.$$

Se $m_i = m_g$ allora l'accelerazione è indipendente dal corpo:

$$a = \frac{gM}{r^2}.$$

Viceversa, se l'accelerazione è indipendente dal corpo allora $\frac{m_i}{m_g} = 1$, e quindi $m_i = m_g$.

Nel caso più semplice possibile, di un solo corpo di massa m in moto circolare uniforme a velocità v su un'orbita di raggio r intorno ad M, affinchè ci sia equilibrio le forze newtoniane in gioco (centrifuga ed attrattiva) devono essere uguali:

$$\frac{mv^2}{r} = g \cdot \frac{mM}{r^2}.$$

L'equazione precedente vale però solo se il corpo è puntiforme: per un corpo materiale, ad esempio di forma sferica, l'equilibrio si ha soltanto nel centro della sfera, mentre sul lato più lontano da M si ha un eccesso di forza centrifuga, e su quello più vicino ad M un eccesso di attrazione gravitazionale (a causa del differente esponente di r a denominatore, nei due casi). Il risultato è dunque che il corpo tende ad allontanarsi da M sul lato lontano, e ad avvicinarsi ad M sul lato vicino: in altre parole, a deformarsi da sfera ad ellissoide.

L'effetto delle variazioni dell'accelerazione di gravità è dunque di creare perturbazioni nella geometria della sfera, che devono essere implicite nella espressione per le variazioni:

$$\frac{da}{dr} = -\frac{2gM}{r^3}.$$

E infatti, poichè la dimensione di $\frac{gM}{r^3}$ è $1/\text{sec}^2$, dividendo per una velocità al quadrato, di dimensione m^2/sec^2, si ottiene una dimensione $1/\text{m}^2$, cioè una curvatura K. Ma l'ovvia velocità da usare in relatività è c, e se la massa M è uniformemente distribuita nel volume della sfera ($\frac{4}{3}\pi r^3$) con densità ρ, si ha

$$K = \frac{gM}{c^2 r^3} = \frac{4\pi g}{3c^2}\rho \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{c^2} \cdot \frac{da}{dr} = -\frac{8\pi g}{3c^2}\rho.$$

Combinando insieme le due formule si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{da}{dr} - K = -\frac{4\pi g}{c^2}\rho,$$

cioè una forma semplificata dell'*equazione di campo per la gravitazione relativistica* di Einstein:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi g}{c^2} T_{\mu\nu},}$$

dove R è l'analogo della curvatura K, che però è ora riferita non più a superfici bidimensionali ma all'intero spazio-tempo quadridimensionale; $R_{\mu\nu}$ è l'analogo di $\frac{da}{dr}$, e coinvolge dunque derivate dell'analogo dell'accelerazione, a sua volta definita mediante derivate seconde spazio-temporali, invece che solo temporali;[11] infine, $T_{\mu\nu}$ è l'analogo della densità di materia.

[11] Poichè ci sono 4 componenti dello spazio-tempo, e ciascuna può essere derivata rispetto a ogni altra, le derivate spazio-temporali hanno 16 componenti, e le derivate seconde ne hanno quindi 64.

2 La guerra dei trent'anni

Per restare in termini metaforici, più che ad una o più rivoluzioni la storia dei quanti è paragonabile alla guerra dei trent'anni: tanti ne furono infatti necessari per riuscire a formulare una convincente teoria, che venisse a capo dei paradossi generati dall'introduzione del quanto d'azione nel 1900.

Planck 1900: il quanto d'azione

Le radiazioni elettromagnetiche, delle quali la luce è un tipico esempio, sono stranamente collegate alla temperatura: ad esempio, il fatto che stando al sole ci si scalda testimonia che l'assorbimento di radiazioni fa aumentare la temperatura (del corpo), e il fatto che accendere una lampadina fa luce testimonia che un aumento di temperatura (del filamento) provoca una emissione di radiazioni.

Un corpo che assorbe radiazioni di una certa frequenza (cioè, nel caso della luce, di un certo colore) aumenta la sua temperatura, e dunque emette altre radiazioni, di cui solo una parte avrà la stessa frequenza delle radiazioni assorbite.

Ogni corpo assorbe una certa quantità delle radiazioni che gli arrivano, e ne riflette il resto: agli estremi ci sono i cosiddetti *corpi bianchi*, che riflettono completamente le radiazioni, e i *corpi neri*, che invece le assorbono completamente (tipici esempi di corpi neri sono i forni ed i caminetti).

Nel 1860 Gustav Kirchhoff scoprì che il rapporto fra le intensità di emissione e di assorbimento di una radiazione di una data frequenza ν, dipende da ν e dalla temperatura T a cui si trova il corpo dato, ma *non* dipende dal corpo stesso: il rapporto è dunque una funzione del tipo $f(\nu, T)$.

Nel caso di un corpo nero l'intensità di assorbimento è, per definizione, 1 (cioè il 100%): il valore di f è dunque semplicemente l'intensità dell'emissione di radiazioni di un corpo nero. Praticamente, per calcolare $f(\nu, T)$ basta scaldare un forno alla temperatura T, aprire un foro di sezione unitaria, far passare la radiazione emessa attraverso un prisma (che separa le varie frequenze), e misurare l'intensità della frequenza ν con un fotometro.

I risultati ottenuti nel 1896 da Wilhelm Wien (premio Nobel nel 1911) mostrarono che, per ciascuna temperatura fissata, i grafici di $f(\nu, T)$ sono simili a curve a campana. Inoltre, al crescere della temperatura aumentano sia la curvatura del grafico che la frequenza in cui si raggiunge il massimo: in accordo con l'esperienza comune, secondo cui la radiazione emessa da un forno aumenta di intensità con la temperatura, e passa dall'infrarosso (non visibile) a bassa temperatura, al rosso dei 500°, all'arancio dei 900°, al giallo dei 1000°, e infine al bianco dei 1200°.

Il problema divenne allora spiegare teoricamente il comportamento osservato sperimentalmente. John Strutt, lord Rayleigh (premio Nobel nel 1904 per la scoperta dell'argon) notò la somiglianza dei grafici precedenti con quelli ottenuti da Maxwell per descrivere (a temperatura costante) il numero di molecole di un gas aventi una data velocità: l'idea ovvia era dunque di applicare i procedimenti statistici della termodinamica, considerando questa volta onde elettromagnetiche (invece che particelle) che rimbalzano sulle pareti del corpo nero.

I risultati furono sorprendenti, perchè mentre per frequenze vicino all'infrarosso i risultati teorici si accordavano con quelli sperimentali, per frequenze verso l'ultravioletto la teoria prevedeva non una caduta delle curve, bensì una loro divergenza verso l'infinito: la cosiddetta *catastrofe dell'ultravioletto*, secondo cui un corpo nero dovrebbe emettere una quantità illimitata di radiazioni, il che significa che i forni dovrebbero esplodere, e i caminetti arrostire chiunque ci si sedesse di fronte.

Il motivo della catastrofe è facile da capire. Rayleigh supponeva infatti che, come nella termodinamica classica, l'energia del corpo nero fosse distribuita uniformemente fra tutte le frequenze: ma al crescere della frequenza (andando cioè verso l'ultravioletto) diminuisce la lunghezza d'onda, e dunque aumenta il numero di radiazioni che possono stare in un corpo nero di dimensioni fissate. Naturalmente, poichè l'energia totale è indipendente dalla frequenza, col crescere del numero delle radiazioni diminuisce la loro energia.

La soluzione al problema è altrettanto facile da capire (ovviamente, meno facile da trovare): basta porre un limite alla divisibilità dell'energia.[12] In particolare, dai dati sperimentali si sa a partire da quali frequenze ν l'emissione di radiazione diventa nulla, e dunque l'energia insufficiente a produrla: si può dunque determinare una costante di proporzionalità h, sotto la quale non si può dividere l'energia.

Max Planck postulò allora nel 1900 che la minima energia possibile per una radiazione di frequenza ν fosse

$$\boxed{E = h\nu.}$$

La costante h ha le dimensioni di un'energia divisa per una frequenza, cioè di una azione (erg×secondi), e rappresenta il minimo valore non nullo che l'azione può avere: per questo motivo si chiama *quanto d'azione*, oltre che *costante di Planck*. Il suo valore, sperimentalmente determinato nel modo accennato, è

$$h = 6,625 \times 10^{-27} = 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,006\,625.$$

La costante h di Planck può essere combinata con la velocità della luce c e con la costante di gravitazione universale G (che ha le dimensioni di metri al cubo diviso chili per secondi al quadrato), in modo da ottenere grandezze che, nelle parole di Planck, "sono indipendenti da particolari corpi o sostanze, mantengono il loro significato sempre e in tutte le condizioni (terrestri, umane o quali che siano), e possono pertanto essere descritte come unità *naturali*":

- la *lunghezza di Planck* $\sqrt{\frac{hG}{c^3}}$, pari a circa 10^{-33} centimetri;

[12] Sia il problema che la soluzione presentano dunque una certa somiglianza con il paradosso di Olbers.

- il *tempo di Planck* $\sqrt{\frac{hG}{c^5}}$, pari a circa 10^{-43} secondi;

- la *massa di Planck* $\sqrt{\frac{hc}{G}}$, pari a circa 10^{-5} grammi.

La mattina del 19 ottobre 1900, portando a passeggio il figlio, Planck gli disse: "Oggi ho fatto una scoperta importante come quella di Newton". In effetti, la scoperta aprì una nuova era per la fisica, e gli valse il premio Nobel del 1918.

Einstein 1905: i quanti di luce

Sulla natura della luce, le opinioni erano state contrastanti fin dai tempi di Newton e Huygens: il primo favoriva una teoria corpuscolare, il secondo una teoria ondulatoria. Il famoso esperimento di Thomas Young, nel 1801, sembrò dare definitivamente ragione a Huygens: passando attraverso una doppia fessura la luce mostrava infatti interferenze tipiche dei fenomeni ondulatori.

Nel 1887 Heinrich Hertz aveva però scoperto il cosiddetto *effetto fotoelettrico*, poi misurato nel 1899 da Philipp Lenard (premio Nobel nel 1905): una superficie di metallo elettricamente carica perde (elettroni, e dunque) la carica se irradiata da luce ultravioletta, tanto più velocemente quanto più la luce è intensa; ma se la superficie viene irradiata da luce infrarossa non perde la carica, indipendentemente dall'intensità della luce. Il fenomeno non era affatto chiaro (benchè vi fosse coinvolta la luce): secondo la teoria ondulatoria, l'energia della radiazione dipende infatti dalla sua intensità ma non dalla sua lunghezza d'onda o frequenza, e dunque anche la luce infrarossa avrebbe dovuto far perdere la carica alla sfera.

Con un ritorno a Newton e alla teoria corpuscolare della luce, Einstein notò nel 1905 che l'ipotesi dei quanti spiegava banalmente l'effetto fotoelettrico. Più precisamente, egli suppose che esistessero dei *quanti di luce*, poi chiamati *fotoni*, aventi una energia $h\nu$ data dalla formula di Planck. Se la frequenza è sufficientemente grande (come nel caso dell'ultravioletto), allora un quanto ha abbastanza energia per rimuovere un elettrone dalla superficie della sfera, altrimenti (come nel caso dell'infrarosso) no. Nel primo caso, l'intensità della luce determina la quantità degli elettroni rimossi, e quindi la velocità di perdita di carica della sfera.

Einstein dedusse anche una formuletta che descriveva il processo in questione. Precisamente, per la conservazione dell'energia, le energie del fotone incidente e dell'elettrone rimosso devono essere uguali, e quest'ultima è la somma delle energie cinetiche e potenziale. Quindi

$$\boxed{h\nu = \frac{mv^2}{2} + eV,}$$

dove m, v ed e sono la massa, la velocità e la carica di un elettrone rimosso da un quanto di luce di frequenza ν, e dunque di energia $h\nu$, e V è il potenziale della sfera. Dalla formula si deduce che la dipendenza di ν da V è lineare, cosa che fu effettivamente verificata da Robert Millikan, tra il 1912 e il 1915, in una serie di esperimenti originalmente ideati per dimostrarne la falsità, e che gli valsero suo malgrado il premio Nobel nel 1923.

Il rapporto di Einstein con i quanti fu quello del tipico 'Bastian contrario': all'inizio, quando tutti (Planck compreso) credevano che essi non fossero altro che un artificio tecnico, egli fu il primo (e, per molti anni, l'unico[13]) a credere alla loro esistenza reale; alla fine, quando tutti si convinsero che la meccanica quantistica era la teoria definitiva, egli rimase l'ultimo (se non l'unico) a credere che ci dovesse essere una teoria più fondamentale, da cui la meccanica quantistica si potesse dedurre nello stesso modo in cui la termodinamica era stata dedotta dalla meccanica classica.

L'evoluzione dell'atteggiamento dei fisici nei riguardi dell'introduzione del fotone è ben rappresentato da due episodi estremi. Il primo è la lettera di Planck per la nomina di Einstein all'Accademia Prussiana, in cui egli scrisse per 'giustificarlo': "che possa a volte aver mancato il bersaglio nelle sue congetture, come per esempio nel caso dell'ipotesi del quanto di luce, non può essere in realtà considerato troppo grave: è infatti impossibile introdurre idee veramente nuove, anche nelle più esatte delle scienze, senza correre a volte qualche rischio".[14] Il secondo episodio è il conferimento del premio Nobel ad Einstein del 1921, con la soprendente motivazione: "per i suoi contributi alla fisica teorica, e specialmente per la scoperta della legge dell'effetto fotoelettrico", senza alcuna menzione della relatività.

Bohr 1913: l'atomo di idrogeno

L'atomismo risale a Democrito, nel V secolo a.C., che immaginava gli atomi come palline, fornite di uncini per permettere loro di potersi stabilmente combinare. Nel 1696 Niklaas Hartsoecker pensò di sostituire agli uncini degli aculei. Dopo la sua scoperta degli elettroni e dei protoni nel 1897, di cui i secondi con massa circa 2.000 volte maggiore dei primi, Joseph Thomson (premio Nobel nel 1906) propose di immaginare gli atomi come palline piene caricate positivamente, in cui gli elettroni di carica negativa fossero conficcati come l'uvetta nelle torte. In seguito a famosi esperimenti del 1908, che mostrarono come l'atomo fosse in realtà quasi tutto vuoto, Ernest Rutherford (premio Nobel per la chimica nello

[13] A partire dal 1908 furono in due, e tali rimasero a lungo, perchè ad Einstein si aggiunse Johannes Stark, che applicò la teoria dei fotoni alla ionizzazione dei gas mediante luce ultravioletta, e ottenne per questo il premio Nobel nel 1919 (prima di Einstein).

[14] Planck non sembrava centrarne una, con Einstein. Ad esempio, quand'essi si incontrarono nel 1913 ed Einstein descrisse il lavoro che stava facendo sulla relatività generale, Planck gli disse: "Se posso darle un consiglio da amico, io che sono più vecchio di lei, lasci perdere questa idea. Anzitutto non avrà successo, e anche se dovesse averlo nessuno la prenderà sul serio" (vedi Abraham Pais, *Sottile è il Signore*, Boringhieri, 1986, pp. 409 e 259).

stesso anno) propose infine un modello atomico del tipo 'sistema solare', con una carica positiva concentrata nel sole, e le cariche negative nei pianeti: era dunque possibile, in teoria, applicare le tecniche classiche allo studio del moto degli elettroni.

Nel caso più semplice possibile, quello dell'idrogeno, le forze classiche in gioco sull'unico elettrone (di massa m e carica negativa e) in moto circolare uniforme a velocità v su un'orbita di raggio r attorno al nucleo (di carica positiva e) sono due:

- la forza centrifuga di Newton: $\frac{mv^2}{r}$
- la forza attrattiva elettrica di Coulomb:[15] $\frac{e^2}{r^2}$ ·

Per l'equilibrio, si doveva dunque avere:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}.$$

Secondo l'elettromagnetismo classico, però, l'equilibrio non è possibile: un corpo elettricamente carico in moto circolare perde continuamente energia, e l'elettrone dovrebbe cadere a spirale nel nucleo. Volendo determinare un'orbita stabile era dunque necessario far intervenire qualcosa di esterno alla teoria classica.

A conferma che non c'è il due senza il tre, nel 1913 Niels Bohr propose di risolvere il problema chiamando in causa ancora una volta i quanti: se il raggio dell'orbita può assumere solo valori discreti, diventa impossibile per l'elettrone scendere sotto il valore minimo, e la stabilità è assicurata.

Più precisamente, Bohr tirò fuori dal cappello[16] una formula miracolosa (in seguito dedotta da De Broglie, come vedremo): a ciascuna orbita di raggio r_n è assegnato un numero orbitale n, tale che

$$\boxed{mvr_n = n \cdot \frac{h}{2\pi}}$$

Dalle due equazioni precedenti si ricava immediatamente il valore del *raggio orbitale* dell'elettrone:

$$r_n = \frac{n^2h^2}{4m\pi^2e^2}.$$

[15]La forza elettrica di Coulomb fra due corpi di carica C e c e a distanza r è $\frac{Cc}{r^2}$ (cariche dello stesso segno si attraggono, e cariche di segno opposto si respingono), esattamente come la forza gravitazionale di Newton fra due corpi di massa M e m e a distanza r è $g\frac{Mm}{r^2}$.

[16]In realtà, non dal suo, visto che egli prese a prestito la formula per la quantizzazione del momento angolare da un lavoro di Nicholson del 1912.

Nel caso dell'orbita minima ($n = 1$) si ottiene il cosiddetto *raggio di Bohr*:

$$\boxed{r_1 = \frac{h^2}{4m\pi^2 e^2} \approx 5,3 \times 10^{-9} \text{ metri} = 0,000\,000\,005\,3 \text{ metri.}}$$

Passando ai problemi energetici, la teoria classica assegna all'elettrone una energia totale data dalla somma delle sue energie cinetica $\frac{e^2}{2r}$ e potenziale $-\frac{e^2}{r}$. Dall'espressione ottenuta sopra per il raggio orbitale si ha dunque

$$E_n = -\frac{e^2}{2r_n} = -\frac{2m\pi^2 e^4}{n^2 h^2}.$$

La seconda idea di Bohr fu di rifarsi alle formula di Planck, e di supporre che il passaggio da un'orbita iniziale di energia E_i e numero orbitale n_i ad un'altra finale di energia E_f e numero orbitale n_f, dovesse richiedere un'energia

$$\boxed{E_i - E_f = h\nu.}$$

Usando l'espressione trovata sopra per l'energia, si ricava allora che la frequenza emessa da un elettrone nel passaggio da un'orbita all'altra è

$$\nu = \frac{1}{h}(E_i - E_f) = \frac{2m\pi^2 e^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

Il risultato era sorprendente, perchè coincideva perfettamente con la misteriosa formula ottenuta empiricamente nel 1885 da Johann Balmer:

$$\nu = \Re\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right),$$

dove $\Re$ si chiama costante di Rydberg. Mentre però in precedenza la costante si poteva solo determinare sperimentalmente, ora Bohr ne aveva trovata una espressione matematica:

$$\boxed{\Re = \frac{2m\pi^2 e^4}{h^3} \approx 3,26 \times 10^{15} \text{ cicli al secondo,}}$$

in perfetto accordo con i valori misurati.

In un colpo solo Bohr riuscì dunque a rendere plausibili sia il modello atomico di Rutherford che la teoria quantistica di Planck, in precedenza ancora molto sospetti, e a guadagnarsi il premio Nobel nel 1922.

Nel giro di qualche anno il modello fu perfezionato: al numero n, che quantizza il raggio orbitale, Arnold Sommerfeld, Samuel Goudsmit e George Uhlenbeck aggiunsero altri tre numeri k, m e s, che quantizzano la forma ellittica dell'orbita, la possibile direzione del piano orbitale in un campo magnetico, e lo spin (o verso di rotazione) dell'elettrone. Il perfezionamento fu completato da Wolfgang Pauli (premio Nobel nel 1945), che introdusse il *principio di esclusione*: in un atomo, due elettroni non possono avere esattamente gli stessi numeri quantici (in particolare, al più due possono stare nella stessa orbita, perchè ci sono solo due possibili valori di spin).

Nella forma perfezionata, il modello atomico di Bohr permise di ridurre l'intera chimica alla fisica, spiegando in particolare le regolarità della tavola degli elementi di Mendeleev.

Einstein 1917: la quantità di moto di un fotone

L'introduzione dei fotoni nel 1905 non era stata compresa completamente neppure da Einstein, visto che solo dopo più di dieci anni egli riuscì a dedurne alcune importanti conseguenze, epistemologicamente interessanti ma matematicamente elementari.

Anzitutto, se assegnare ai fotoni un'energia secondo la formula di Planck aveva permesso di spiegare l'effetto fotoelettrico, si poteva anche invertire il processo, ed usare l'ipotesi dell'esistenza dei fotoni per derivare la formula di Planck. Einstein usò il modello dell'atomo di Bohr per la sua derivazione, scoprendo incidentalmente il processo su cui si basa il *laser*,[17] ma oggi la cosa si può fare più facilmente nel seguente modo.

Si immagini di avere una radiazione in un contenitore dalle pareti completamente riflettenti, e di comprimere la radiazione spingendo le pareti. Considerando un movimento infinitesimo, all'inizio ciascun fotone avrà una energia E_i ed una frequenza ν_i, ed alla fine un'energia E_f ed una frequenza ν_f: ma la variazione percentuale di energia dovuta alla compressione deve essere pari alla variazione percentuale di frequenza dovuta all'effetto Doppler (prodotto sui fotoni dal movimento delle pareti). Dunque

$$\frac{E_i}{E_f} = \frac{\nu_i}{\nu_f} = \text{ costante,}$$

ossia

$$\frac{E_i}{\nu_i} = \frac{E_f}{\nu_f} = \text{ costante,}$$

e basta chiamare h la costante per avere

$$E = h\nu.$$

[17]Secondo Einstein, quando un fotone passa vicino ad un atomo eccitato, stimola un elettrone a (passare ad un'orbita di minore energia ed) emettere un fotone identico che si muove parallelamente a quello di passaggio, formando così una coppia di fotoni. I due proseguono stimolando altri due elettroni, creando così quattro fotoni, e così via, fino a che si forma un fascio di fotoni identici che si muovono nella stessa direzione. Il nome 'laser' significa appunto 'amplificazione di luce stimolata da emissione di radiazione' ('**l**ight **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation').

L'esistenza dei fotoni risultava così essere una formulazione alternativa della teoria dei quanti. Rimanevano però da determinarne le proprietà corpuscolari, e Einstein notò che per questo bastavano poche righe di manipolazioni formali.

Anzitutto, si avevano due espressioni per l'energia di un fotone: relativistica e quantistica, ossia mc^2 e $h\nu$. Uguagliandole, si poteva ottenere la massa dei fotoni di un raggio di luce con frequenza ν, cioè

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Inoltre, notando che la velocità c dell'onda è per definizione il prodotto della lunghezza λ per la frequenza ν, si poteva ottenere la quantità di moto dei fotoni, cioè

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{h}{\lambda}.$$

Si noti di passaggio che $p = \frac{E}{c}$: poichè in generale $\frac{E}{c} = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$, segue che $m_0 = 0$, ossia la massa a riposo di un fotone è nulla (in altre parole, un fotone non può mai essere messo "a riposo").

La verifica sperimentale dell'esistenza di una quantità di moto del fotone si ebbe nel 1923, quando Arthur Compton scoprì l'effetto che porta il suo nome: la lunghezza d'onda dei fotoni riflessi dagli elettroni di un blocco di paraffina aumenta di una quantità $\Delta\lambda$, che è precisamente uguale alla quantità $\frac{h}{mc}$ che deriva dalla formula di Einstein, e si spiega mediante la conservazione della quantità di moto (così come l'effetto fotoelettrico si spiegava mediante la conservazione dell'energia).

La scoperta dell'effetto convinse finalmente i fisici dell'esistenza del fotone, segnò la fine dell'isolamento di Einstein sull'argomento, e valse a Compton il premio Nobel del 1927.

De Broglie 1924: il dualismo onda-particella

L'isolamento di Einstein sul dualismo della luce come onda e fotoni cessò nel 1924, quando entrò in scena Louis de Broglie che, più realista del re, estese il dualismo a onde e particelle qualsiasi.

In altre parole, de Broglie propose di associare ad ogni onda di lunghezza λ, frequenza ν e velocità u (uguale a $\lambda\nu$) una particella con le seguenti caratteristiche:

energia	$E = h\nu$
massa	$m = \dfrac{h\nu}{c^2}$
quantità di moto	$p = \dfrac{h}{\lambda}$
velocità	$v = \dfrac{c^2}{u}$

La prima relazione è quella di Planck. La seconda e la terza sono quelle di Einstein per il fotone. La quarta, inutile nel caso del fotone perchè la sua velocità è c, si ottiene da esse nel modo seguente:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{c^2}{h\nu} = \frac{c^2}{\lambda\nu} = \frac{c^2}{u}\cdot$$

Viceversa, de Broglie propose di associare ad ogni particella di velocità v, quantità di moto p ed energia E un'onda con le seguenti caratteristiche:

frequenza	$\nu = \dfrac{E}{h}$
lunghezza	$\lambda = \dfrac{h}{p}$
velocità	$u = \dfrac{c^2}{v}$

La prima relazione è quella di Planck. La seconda è quella di Einstein per il fotone, dove però questa volta la quantità di moto non è più mc ma mv. La terza è quella derivata sopra per la velocità.

Si noti che se $v = c$ (come nel caso del fotone) allora $u = c$, ma se $v < c$ (come nel caso dell'elettrone) allora $u > c$! L'apparente conflitto con la relatività viene risolto notando che l'onda di cui si parla non esiste in natura, perchè ne sono determinate solo la lunghezza d'onda e la frequenza: essa non ha nè inizio nè fine ed è perfettamente regolare, e non può dunque descrivere il moto di una particella reale. De Broglie analizzò questo moto combinando molte onde del tipo precedente, con un procedimento analogo all'analisi di Fourier (che analizza funzioni arbitrarie combinando molte funzioni trigonometriche): si ottiene così un *pacchetto d'onde*, la cui velocità combinata risulta essere esattamente quella della particella.

Una conseguenza importante del lavoro di de Broglie fu la derivazione teorica della prima ipotesi di Bohr. Se infatti un elettrone si può considerare come un'onda di lunghezza λ in un'orbita di raggio r, affinchè l'onda sia stazionaria è necessario che la lunghezza dell'orbita, cioè $2\pi r$, sia uguale ad un multiplo intero della lunghezza d'onda: deve dunque esistere n tale che

$$2\pi r = n\lambda.$$

Usando l'espressione per λ ottenuta sopra,

$$2\pi r = n \cdot \frac{h}{p},$$

da cui deriva appunto il primo postulato di Bohr

$$pr = n \cdot \frac{h}{2\pi}\cdot$$

Il lavoro di de Broglie fu immediatamente riconosciuto come una svolta fondamentale. Einstein, dopo aver letto la sua tesi, dichiarò nella sua suggestiva maniera: "è stato sollevato un lembo del grande velo". E quasi immediatamente, nel 1929, de Broglie ottenne il premio Nobel.

La conferma sperimentale delle proprietà ondulatorie della materia venne dall'osservazione della diffrazione degli elettroni da parte dei cristalli, in esperimenti che valsero a Clinton Davisson e George Thomson il premio Nobel nel 1937.[18]

Heisenberg 1926: il principio d'indeterminazione

Nel 1925 Werner Heisenberg ottenne la prima formulazione matematica della teoria quantistica, in termini di matrici infinite. Il suo contributo fondamentale è però legato al principio di indeteminazione, che è una profonda ma semplice conseguenza delle relazioni precedenti.

Formalmente Heisenberg notò anzitutto che, come un metro non può misurare distanze con precisione maggiore dell'intervallo minimo fra le sue tacche, così un'onda non può misurare la posizione di una particella con precisione maggiore della sua lunghezza: questo si esprime concisamente mediante la relazione

$$\Delta x \geq \lambda.$$

Analogamente, come una bilancia non può misurare pesi con precisione maggiore del minimo peso di riferimento, così una particella non può misurare la quantità di moto di un'altra particella con precisione maggiore della propria quantità di moto: per la formula di Einstein e de Broglie, questo si esprime mediante la relazione

$$\Delta p \geq \frac{h}{\lambda}\cdot$$

Moltiplicando, si ottiene il primo principio d'indeterminazione:

$$\boxed{\Delta p \Delta x \geq h.}$$

[18]George Thomson, che osservò le proprietà ondulatorie dell'elettrone, era il figlio di Joseph Thomson, che ne aveva osservate per primo le proprietà corpuscolari, ottenendo per questo il premio Nobel nel 1906.

Da un punto di vista matematico, questo principio dice che non si può parlare dei punti (p, x), ma solo di (aperti contenenti) intorni rettangolari di area $\Delta p \Delta x \geq h$: più un lato diminuisce, permettendo una determinazione più precisa di una delle due quantità, più l'altro lato aumenta, impedendo una determinazione dell'altra quantità. Si tratta cioè, in un senso, di un passaggio da una *geometria* con punti a una *topologia* senza punti.

In maniera simmetrica Heisenberg notò poi che, come un orologio non può misurare tempi con precisione maggiore dell'intervallo minimo fra i suoi ticchettii, così un'onda non può misurare un intervallo di tempo con precisione maggiore dell'inverso della sua frequenza:[19] questo si esprime mediante la relazione

$$\Delta t \geq \frac{1}{\nu}.$$

Analogamente, poichè una particella non può misurare energie con precisione maggiore della propria, per la formula di Planck si ha

$$\Delta E \geq h\nu.$$

Moltiplicando, si ottiene il secondo principio d'indeterminazione:

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq h.}$$

Si noti la perfetta simmetria negli enunciati e nelle dimostrazioni dei due principi di indeterminazione, dovuta al fatto che la quantità di moto corrisponde relativisticamente allo spazio, e quantisticamente alla lunghezza d'onda, mentre l'energia corrisponde relativisticamente al tempo, e quantisticamente alla frequenza.

Infine, dai due principi di indeterminazione e dalla formula $E = mc^2$ si ottiene immediatamente

$$\boxed{\Delta m \Delta t \geq \frac{h}{c^2},}$$

che fissa la precisione massima con cui si può misurare la massa di una particella che decade in un intervallo di tempo Δt.

Per questi suoi contributi, oltre che per la formulazione della meccanica quantistica in termini di matrici, Heisenberg ottenne il premio Nobel del 1932.

Schrödinger 1926: l'equazione d'onda

La descrizione più nota della meccanica quantistica è in termini di funzioni d'onda. Benchè in modo leggermente meno elementare di quanto fatto finora per altri risultati, è possibile ricavare anche questa descrizione abbastanza semplicemente.

[19] La frequenza corrisponde al numero di ticchettii in un intervallo di tempo unitario, e quindi l'inverso della frequenza all'intervallo di tempo fra ticchettii.

Per cominciare, partiamo dall'idea di de Broglie di considerare l'elettrone come un'onda stazionaria (indipendente dal tempo), in prima approssimazione unidimensionale. L'ampiezza di un'onda il cui asse sia la circonferenza del cerchio unitario si può descrivere, in funzione della lunghezza x dell'arco di circonferenza, con una funzione del tipo

$$\Psi(x) = e^{ikx}.$$

Derivando due volte, si ha dapprima

$$\frac{d\Psi}{dx} = ike^{ikx} = ik\Psi,$$

e poi

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -k^2\Psi,$$

cioè

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0,$$

che è la classica equazione descrivente il moto dell'oscillatore armonico.

Poichè l'esponenziale complesso ha periodo 2π, se λ è la lunghezza d'onda si ha $k\lambda = 2\pi$, e quindi

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Psi = 0.$$

Usando la formula di Einstein e de Broglie per la lunghezza d'onda, si ottiene

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2 p^2}{h^2}\Psi = 0.$$

Ma $p = mv$, e quindi

$$p^2 = m^2v^2 = 2m\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Poichè $\frac{mv^2}{2}$ è l'energia cinetica, se E e V sono rispettivamente l'energia totale e potenziale si ha

$$E = \frac{mv^2}{2} + V,$$

e quindi

$$p^2 = 2m(E - V),$$

da cui

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8m\pi^2}{h^2}\,(E - V)\Psi = 0.$$

Se l'onda è tridimensionale invece che unidimensionale, e Ψ si suppone separabile, allora la derivata spaziale è la somma delle derivate parziali nelle tre direzioni x, y e z. Se cioè

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

si ottiene *l'equazione d'onda indipendente dal tempo*:

$$\boxed{\nabla^2 \Psi + \frac{8m\pi^2}{h^2}(E - V)\Psi = 0.}$$

Equivalentemente, si può scrivere

$$E\Psi = -\frac{h^2}{8m\pi^2}\,\nabla^2\Psi + V\Psi,$$

che mostra esplicitamente l'energia del sistema. O, più concisamente e con ovvie notazioni,

$$E\Psi = H\Psi,$$

dove H è il cosiddetto hamiltoniano del sistema che ne descrive l'energia.

Per descrivere un'onda non più stazionaria, ma in movimento lungo la circonferenza, ad esempio in senso orario, basta considerare, invece dell'arco kx, un arco $kx - \omega t$ la cui lunghezza decresce in funzione del tempo, e dunque una nuova funzione

$$\Psi(x,t) = e^{i(kx - \omega x)}.$$

Derivando questa volta rispetto al tempo, si ha

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega\Psi,$$

cioè

$$i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega\Psi.$$

Poichè l'esponenziale ha periodo 2π, ed ω è lo spostamento dell'onda nel tempo unitario, se ν è la frequenza dell'onda si ha $2\pi\nu = \omega$, e quindi

$$\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nu\Psi.$$

Usando la formula di Planck per l'energia, si ha

$$\frac{ih}{2\pi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = h\nu\Psi = E\Psi.$$

Sostituendo nell'equazione d'onda indipendente dal tempo, si ottiene *l'equazione d'onda dipendente dal tempo*:

$$\boxed{i \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8m\pi^2}\nabla^2\Psi + V\Psi,}$$

a sua volta spesso abbreviata come

$$i\hbar\dot{\Psi} = H\Psi.$$

Si noti anche qui, come già per il principio di indeterminazione, la perfetta simmetria nella dimostrazione, che elimina la lunghezza d'onda in favore della quantità di moto nel calcolo della derivata rispetto allo spazio, e la frequenza in favore dell'energia nel calcolo della derivata rispetto al tempo.

L'equazione di Schrödinger sembra essere la più citata equazione scientifica del mondo, anche se la sua forma un po' complicata la rende (per sua fortuna) abbastanza immune dalle citazioni divulgatorie. Essa contiene praticamente l'intera teoria della materia: nel caso dell'elettrone, dai parametri tridimensionali (spaziali) di Ψ si ricavano infatti i valori dei tre numeri atomici n, k ed m (ma non lo spin s), e quindi il modello dell'atomo di Bohr perfezionato; nel caso del fotone, si ottengono invece le equazioni di Maxwell.

Per questo lavoro Erwin Schrödinger ottenne il premio Nobel nel 1933, insieme a Dirac.

Una conseguenza immediata dell'equazione di Schrödinger è la non commutatività del prodotto fra energia e tempo, dimostrata in origine da Heisenberg nel 1925. Poichè infatti dalla discussione precedente si ha

$$E = \frac{ih}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t},$$

da

$$(Et - tE)\Psi = \frac{ih}{2\pi}\left(\frac{\partial(t\cdot\Psi)}{\partial t} - t\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = \frac{ih}{2\pi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + t\frac{\partial\Psi}{\partial t} - t\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = \frac{ih}{2\pi}$$

segue

$$\boxed{Et - tE = \frac{ih}{2\pi}.}$$

E una relazione analoga vale anche per le altre coppie di grandezze che soddisfano il principio di indeterminazione. In particolare,

$$xp - px = \frac{ih}{2\pi}.$$

Dirac 1928: l'equazione d'onda relativistica

Nonostante tutti i suoi meriti, l'equazione di Schrödinger non è ancora l'ultima parola: essa infatti tratta spazio e tempo in maniera asimmetrica, e non è dunque relativisticamente invariante.

Per otttenerne una versione relativistica si parte dall'Hamiltoniano appropriato, cioè

$$H = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

e lo si inserisce nell'equazione di Schrödinger

$$E\Psi = H\Psi,$$

ottenendo

$$\left(\frac{E}{c} - \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}\right)\Psi = 0.$$

Il primo problema è che questa equazione non è simmetrica in E e p, ma a ciò si rimedia facilmente moltiplicando per

$$\frac{E}{c} + \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

ed ottenendo

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - p^2 - m_0^2 c^2\right)\Psi = 0.$$

Il secondo problema è che questa equazione, a differenza di quella di Schrödinger, non è lineare in E, ma a ciò si rimedia altrettanto facilmente cancellando gli esponenti e introducendo fattori correttivi α e β, ottenendo

$$\left(\frac{E}{c} - \alpha p - \beta m_0 c\right)\Psi = 0,$$

dove i fattori correttivi sono determinati in modo da implicare l'equazione precedente, e non perdere così l'invarianza relativistica.

Ricordando che $E = \frac{ih}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ nell'equazione di Schrödinger, e che l'onda è in realtà tridimensionale e non unidimensionale, si arriva così all'*equazione d'onda relativistica*

$$\boxed{\frac{ih}{2\pi c} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m_0 c)\Psi,}$$

in cui a primo membro compaiono miracolosamente quattro costanti fondamentali, due matematiche (π e i) e due fisiche (h e c): le prime mostrano che siamo in presenza di fenomeni periodici e immaginari, le ultime che tali fenomeni sono descritti in maniera quantistica e relativistica.

I fattori correttivi, a prima vista introdotti in maniera artificiosa, risultano essere matrici 4×4, e quindi producono in realtà una funzione d'onda a quattro componenti. L'inaspettata complicazione si rivela però sorprendentemente informativa: due delle componenti risultano descrivere i due possibili valori dello spin dell'elettrone, cioè anche il quarto numero quantico s non spiegato dall'equazione di Schrödinger, che appare dunque come un fenomeno relativistico; le altre due componenti descrivono i possibili valori dello spin di una particella duale (con la stessa massa e carica, ma di segno opposto) detta *positrone*, la cui esistenza non era conosciuta.

Per questo lavoro Paul Dirac ottenne il premio Nobel nel 1933, insieme a Schrödinger. Il premio del 1936 andò invece a Carl Anderson, per l'osservazione del positrone previsto da Dirac.

Benchè l'esistenza della materia duale, detta *antimateria*, sia stata scoperta nell'ambito dell'equazione di Dirac, essa è in realtà un fenomeno più generale che dipende soltanto dalla relatività e dal principio di indeterminazione. Basta infatti considerare una qualunque particella che viaggi a velocità prossima a quella della luce, e supporre di misurarne la posizione in due istanti successivi. Per il principio di indeterminazione, nel primo istante la particella potrebbe in realtà trovarsi un po' prima di dove la si osserva, e nel secondo istante un po' dopo: la sua velocità potrebbe dunque essere maggiore di quella della luce, in contrasto con la relatività.

Per evitare la contraddizione bisogna ammettere che, in tal caso, nei due istanti non si stia osservando la *stessa* particella. Questo è possibile se la prima misura fornisce un'energia che permette la creazione di una coppia particella-antiparticella: la vecchia particella e la nuova antiparticella si annichilano, e nella seconda misura si sta in realtà osservando non più la vecchia particella, ma quella nuova.

Conclusione

Le equazioni di Einstein per la relatività, e di Schrödinger e Dirac per la meccanica quantistica, ripropongono problemi che erano già stati proposti dalle equazioni di Newton per la meccanica classica, e di Maxwell per l'elettromagnetismo: come visualizzare le grandezze matematiche che vi compaiono, e che grado di realtà attribuire loro?

Già il primo problema non è di facile soluzione: la relatività e la meccanica quantistica richiedono infatti la visualizzazione spaziale di curvature di spazi quadrimensionali, e di ampiezze di onde tridimensionali. Il secondo problema, poi, può ammettere soltanto risposte ipotetiche, a causa dell'ovvia impossibilità di conoscere la realtà in maniera assoluta, indipendentemente cioè dagli *a priori* a cui siamo stati destinati.

Se la realtà è impossibile da conoscere, essa non è però impossibile da distruggere: e la fisica moderna ha trovato proprio nelle formule più famose della relatività e della meccanica quantistica gli strumenti per farlo, sia fisicamente (con la tecnologia atomica) che metafisicamente (con l'interpretazione di Copenaghen).

Svanita l'innocenza da un lato, e la realtà subatomica dall'altro, che cosa rimane della fisica teorica di inizio secolo? Forse l'eleganza del formalismo, e dunque appunto la matematica: in altre parole, proprio quegli argomenti che abbiamo condensato in poche paginette, e che alla fine non è ben chiaro che cosa provino (oltre a se stessi).