

La scala per le stelle... sperimentazione del calcolo della parallasse

di Fabio Pacucci

Sulle tracce della parallasse...

L'obiettivo della nostra missione è estrapolare l'angolo di parallasse di un corpo celeste, cioè la Luna, da una coppia di fotografie simultanee che la ritraggono da due punti di osservazione differenti rispetto ad un sistema di riferimento stellare (fig.2).

E' necessario quindi che in entrambe le fotografie sia ben visibile la stessa coppia di stelle. Una volta ottenuto l'angolo di parallasse si può trovare la distanza fra la Terra e la Luna.

Però è importantissimo che le due fotografie rispettino alcune "regole" e cioè:

- Devono essere scattate da due posizioni differenti e sufficientemente distanziate.
- Devono essere scattate nello stesso istante.
- Devono contenere, oltre al corpo oggetto di indagine, almeno due stelle.
- Non devono essere riprese ad ingrandimenti troppo differenti.

Vediamo qui di seguito il procedimento di calcolo per misurare la parallasse della signora del cielo: la Luna.

Io e un mio amico concordiamo di osservare simultaneamente la Luna da punti differenti della Terra e di scattarle ognuno dal suo punto di vista una foto. Successivamente osserviamo le due foto e constatiamo che la Luna, rispetto a due stelle visibili in entrambe le foto, ha due posizioni differenti.

La misura dell'angolo tra le due differenti posizioni della Luna, opportunamente valutate, è la parallasse dell'oggetto, da cui si può ricavare la sua distanza topocentrica.

..con l'aiuto di due fotografie istantanee e del Teorema del coseno.

I passaggi matematici seguenti sono stati ricavati dal teorema del coseno, o di Carnot, della trigonometria piana.

In effetti, sulla sfera celeste noi misuriamo degli angoli sferici, ma ho preferito non applicare delle formule di trigonometria sferica, sia perché non rientrano nel programma della maggior parte degli istituti superiori scolastici in Italia, sia perché per foto a piccolo campo, come quelle utilizzate, l'approssimazione è piuttosto buona. In questo modo le uniche misurazioni necessarie saranno di tipo lineare.

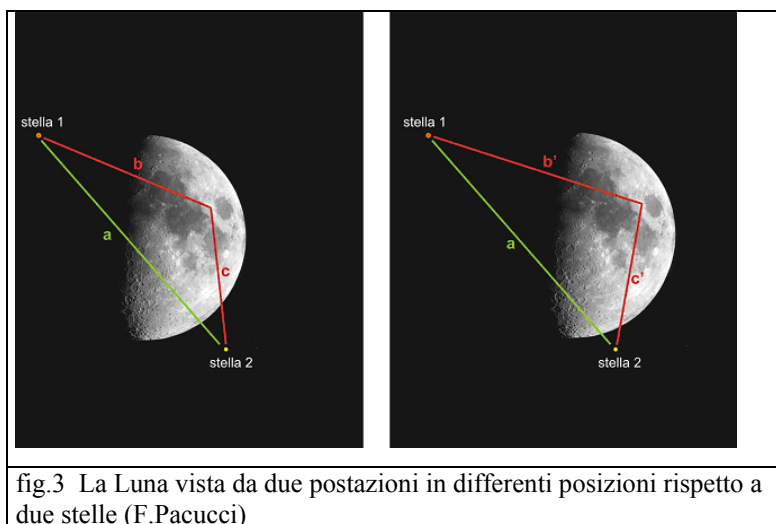


fig.3 La Luna vista da due postazioni in differenti posizioni rispetto a due stelle (F.Pacucci)

Luna e la seconda stella (fig.3).

Il lato **a** non varia da una foto all'altra, mentre sono tra loro diversi **b** rispetto a **b'** e **c** rispetto a **c'**.

Prima di tutto dobbiamo individuare sulle foto le due stelle di riferimento e un punto caratteristico della Luna non puntiforme, come un cratere lunare.

Costruiamo sulle foto i triangoli **ABC** ed **AB'C'** i cui lati congiungono:

AC (a) le stelle di riferimento,

AB (b) e AB'(b'), la prima stella e il punto caratteristico della Luna,

BC (c) e B'C(c'), il punto caratteristico della

Ora sovrapponiamo i due triangoli lungo la base a e otteniamo la figura della fig.4. Il nostro scopo è misurare la distanza angolare F che separa i vertici superiori dei triangoli.

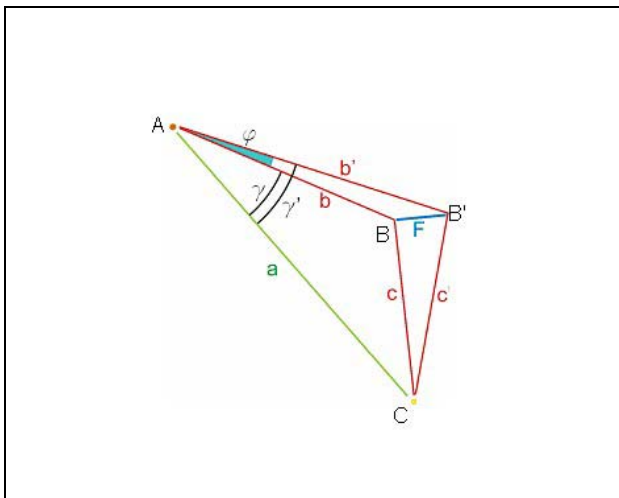


fig.4 Sovrapposizione dei i triangoli della figura precedente rispetto alle basi, congruenti. (F.Pacucci)

Con la formula di Carnot, ricaviamo prima gli angoli

γ e γ' in funzione dei lati dei rispettivi triangoli.

Poiché

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{e } \cos \gamma' = \frac{a^2 + b'^2 - c'^2}{2ab'}$$

si ricava $\gamma = \ar \cos \gamma$ e $\gamma' = \ar \cos \gamma'$

Il valore assoluto della loro differenza ci fornisce l'angolo φ .

$$\varphi = |\gamma - \gamma'|$$

Riapplicando il teorema del coseno al

triangolo ABB' e conoscendo l'angolo φ , possiamo calcolare proprio la base del triangolo, BB' , la misura lineare dell'incognita, che indichiamo con F :

$$F = \sqrt{b^2 + b'^2 - 2bb' \cos \varphi}$$

Per trasformare questa grandezza nell'angolo di parallasse sarà sufficiente fare una proporzione con una qualsiasi altra grandezza presente nelle due foto, per esempio la distanza angolare fra la coppia di stelle scelta come sistema di riferimento.

La proporzione è quindi: $2P : F = A : a$

dove

$2P$ = il doppio dell'angolo di parallasse, per motivi di comodità nei calcoli successivi.

A = la distanza angolare esistente fra le due stelle di riferimento.

da cui

$$P = \frac{F \cdot A}{2a}$$

Sostituendo i valori noti, la formula per il calcolo dell'angolo di parallasse P è:

$$P = \frac{\sqrt{b^2 + b'^2 - 2bb' \cos \varphi} \cdot A}{2a}$$

La **parallasse** è l'angolo sotto cui è visto un oggetto celeste, nel nostro caso un punto particolare della Luna, da due osservatori sufficientemente distanziati. Corrisponde cioè all'angolo sotto il quale un "lunatico" collocato nella postazione da noi prescelta vedrebbe la distanza tra i due osservatori (fig.5).

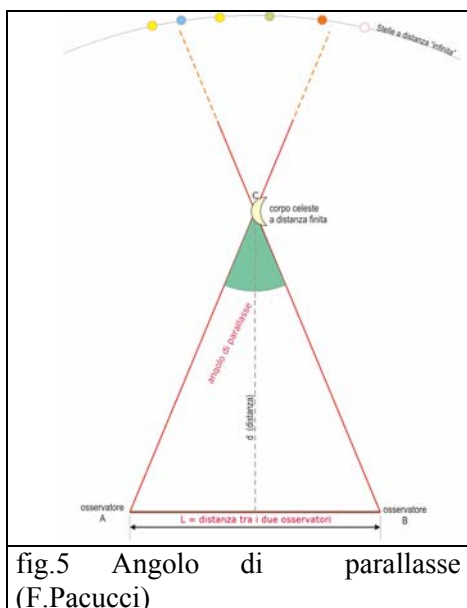


fig.5 Angolo di parallasse (F.Pacucci)

Applicando la trigonometria al triangolo rettangolo ACH della fig.5 dove $AC = D =$ distanza Terra-Luna
 $2P =$ doppio dell'angolo di Parallasse
 $AH =$ metà della distanza L tra due osservatori
 si ha che

$$AC = \frac{AH}{\sin P}$$

e moltiplicando per 2 numeratore e denominatore

$$D = \frac{L}{2 \cdot \sin P}$$

Applicare la formula per il calcolo della parallasse “a mano” può sembrare (anzi, è!) piuttosto lungo e difficoltoso, ma basta inserirla in un qualsiasi programma di calcolo per ottenere tutti i calcoli che vogliamo prima che la Luna si sposti di un solo millimetro! Tutto qui!

Quella che sembrava una missione impossibile (misurare... il cielo!) si è rivelata una missione quantomeno... divertente!

La parte più difficile è fatta, non resta che metterci i telescopi in spalla e iniziare le misurazioni.

Prima, però, inserisco una sezione dedicata a vari approfondimenti teorici. Se siete curiosi, se la matematica non vi annoia oppure se la sezione precedente vi ha lasciato qualche “tremendo dubbio” leggete quello che segue.

Altrimenti volate direttamente alle esperienze sul campo...

ATTENZIONE: CADUTA FORMULE...

Divagazioni su parallasse e distanza fra gli osservatori

Di sicuro leggendo queste pagine vi sarete chiesti: ma quanto lontano si può andare? E quanto devono essere distanti gli osservatori? Ragioniamoci sopra.

Poiché la parallasse è l'angolo sotto cui vediamo lo spostamento apparente di un oggetto, dovuto esclusivamente a differenti sistemi di riferimento, è ovvio che per osservatori situati nello stesso punto dello spazio l'angolo di parallasse di qualsiasi oggetto è nullo. La separazione minima fra gli osservatori è funzione della distanza dell'oggetto del quale si vuole misurare la parallasse e dello strumento ottico utilizzato dagli osservatori.

Per questo motivo, prima di effettuare qualsiasi misurazione, sarà necessario valutare attentamente questo aspetto... Non pretenderete di misurare da casa vostra la distanza della Galassia di Andromeda, vero?

Qualsiasi strumento ottico, compresi i nostri occhi, possiedono un *potere risolutivo*, inteso come la minima distanza angolare alla quale due oggetti devono essere localizzati affinché siano riconosciuti come corpi distinti.

Per un telescopio il potere risolutivo si può calcolare con una buona approssimazione tramite la formula:

$$\sigma = \frac{120''}{D}$$

dove: $\sigma =$ potere risolutivo espresso in secondi d'arco e $D =$ diametro dello strumento espresso in millimetri

Il potere risolutivo teorico della maggior parte dei telescopi amatoriali si aggira intorno al secondo d'arco. In realtà un tale valore si raggiunge in condizioni perfette, cioè in totale assenza

di turbolenza atmosferica. Il potere risolutivo di uno strumento pone un importante limite alle misurazioni di parallasse.

Consideriamo ora un triangolo isoscele ABC, la cui base AB rappresenta la distanza fra i due osservatori e nel vertice C è posto l'oggetto di cui si vuole misurare la parallasse (fig.6).

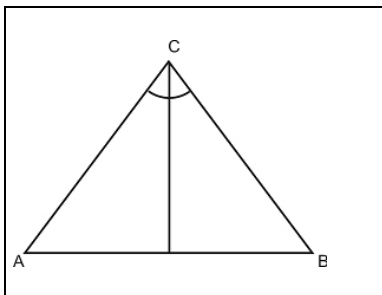


Figura 6 AB è la distanza tra osservatori e in C è l'oggetto celeste considerato per la misura di parallasse. (F.Pacucci)

L'angolo in C è il doppio dell'angolo di parallasse.

Definiamo **limite parallattico strumentale** la metà del potere risolutivo dello strumento. Per applicare il metodo proposto è necessario che l'angolo di parallasse da misurare sia superiore al limite parallattico strumentale. Se così non fosse, la parallasse dell'oggetto sarebbe nulla, poiché non strumentalmente misurabile.

Supponiamo ora che l'angolo di parallasse misurato sia esattamente uguale al limite parallattico strumentale. Conoscendo la distanza dell'oggetto, possiamo determinare la minima distanza alla quale due osservatori devono essere posti affinché possano misurare un angolo di parallasse uguale, o superiore, al limite parallattico strumentale.

La formula fondamentale è: $L \geq 2 \text{sen} L_{PS} \cdot D$

dove: L = distanza fra i due osservatori D = distanza del corpo in esame

L_{PS} = limite parallattico strumentale

Per esempio, assumendo un limite parallattico strumentale di 1 secondo d'arco, in teoria due osservatori distanziati di 3,7 chilometri potrebbero effettuare la misurazione di parallasse sulla Luna (distanza media: 384.000 Km).

In pratica, tuttavia, la distanza reale deve essere ampiamente superiore a quella calcolata.

Sempre con questa formula, si ricava che, assumendo la distanza fra gli osservatori pari al diametro terrestre, circa 12.756 km, che è la massima distanza possibile fra gli osservatori terrestri, ... *a meno di non riuscire a coinvolgere qualche astronauta*, è possibile utilizzare il metodo della parallasse con corpi distanti al massimo 3 miliardi di km, o poco meno. Ma per far questo sono necessarie strumentazioni d'altissima precisione.

Altra osservazione: per una migliore precisione è necessario considerare come distanza fra gli osservatori il segmento che unisce le loro posizioni, non la geodetica. E' possibile calcolare la distanza tramite semplici formule di trigonometria sferica in funzione delle coordinate geocentriche dei siti.

Infine, voglio porre l'attenzione su un particolare importante: chi ci assicura che il triangolo formato dalle congiungenti oggetto-osservatori è isoscele? In realtà il triangolo è isoscele solo nel caso in cui l'oggetto passi allo zenit nel punto medio della congiungente i due osservatori. Ma il triangolo può essere considerato isoscele poiché la base è trascurabile rispetto all'altezza, infatti le distanze terrestri sono trascurabili rispetto a quelle astronomiche.

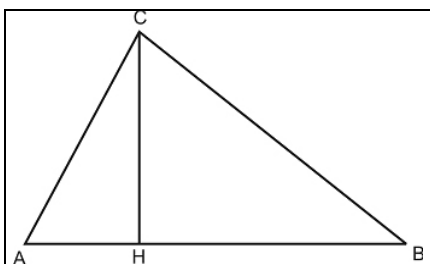


fig.7 Il lato AB rappresenta la distanza fra gli osservatori, CH la distanza fra l'oggetto celeste considerato e il segmento che congiunge i due osservatori.

Per convincersi di questo, è sufficiente disegnare su di un foglio un qualsiasi triangolo, con la base trascurabile rispetto all'altezza. Si dimostra matematicamente che maggiore è il rapporto fra altezza e base più il rapporto fra i lati tende a 1.

Infatti consideriamo un triangolo generico ABC, in cui il lato AB rappresenta la distanza fra gli osservatori, CH la distanza fra l'oggetto celeste considerato e il segmento che congiunge i due osservatori (fig.7)

Se consideriamo distanze astronomiche, AB è decisamente minore di CH.

Quindi possiamo scrivere che $\frac{CH}{AB} = \kappa \rightarrow \infty$.

Ovviamente è solo un'approssimazione. Considerando una distanza fra gli osservatori di 100 km, per la Luna è $\kappa = 3.840$, per il Sole è $\kappa = 1.500.000$, per Giove è $\kappa = 6.280.000$, per Proxima Centauri è $\kappa = 437.000.000.000$.

Quindi, per distanze astronomiche, possiamo assumere che $AB \rightarrow 0$

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli **AHC** e **BHC**, possiamo scrivere:

$$\lim_{AB \rightarrow 0} \begin{cases} AC^2 = CH^2 + AH^2 \\ CB^2 = CH^2 + HB^2 \end{cases}$$

Se $AB \rightarrow 0$, il quadrato di quantità minori di **AB** (**AH** e **HB**) possono essere considerate trascurabili e con una certa approssimazione, possiamo dire che **AC = CB**.

Inoltre, sempre per la stessa approssimazione, possiamo affermare che anche l'altezza **CH** tende ai lati obliqui **AC = CB**. Incredibile, vero?

Tic, tac... tic, tac... tic, tac...

Non ci vuole molto a capire che ora parliamo del tempo. E' necessario che lo scarto temporale fra le due osservazioni sia minimo, non deve mai superare il secondo. Se lo scarto temporale fosse consistente, la misurazione non sarebbe precisa poiché all'angolo di parallasse si sommerebbe lo spostamento proprio dell'oggetto.

E' ovvio che questa necessità è più sentita per oggetti vicini come la Luna, che per corpi più distanti.

Per questo si consiglia l'utilizzo di orologi sincronizzati, meglio se radiocontrollati.

Ovviamente è possibile anche utilizzare due foto non scattate contemporaneamente: in questo caso è necessario calcolare teoricamente lo spostamento angolare dell'oggetto e sottrarre questo valore dall'angolo di parallasse trovato

Ingrandimenti di foto, che passione!

Fino a ora ho dato per scontato che le due fotografie abbiano lo stesso ingrandimento, infatti nel caso da noi esaminato le stelle nelle due foto hanno distanze lineari identiche.

Ovviamente questo nella realtà è impossibile, ma delle semplicissime considerazioni geometriche permettono di ovviare al problema. Vediamo come.

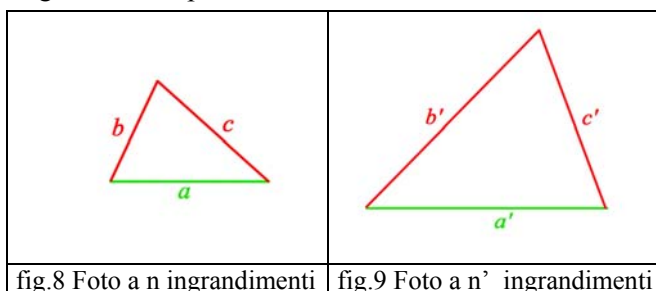
La distanza angolare fra due qualsiasi punti di una fotografia è funzione dell'ingrandimento utilizzato. Maggiore è l'ingrandimento, maggiore sarà la distanza angolare.

Se due punti su di una fotografia presa a **n** ingrandimenti distano tra loro di una certa lunghezza **d**, due punti di una fotografia presa a **kn** ingrandimenti disteranno tra loro di una lunghezza **kd**.

Definiamo **K** il rapporto fra il numero di ingrandimenti della seconda fotografia e il numero di ingrandimenti della prima.

$$K = \frac{n'}{n}$$

Per uniformare le due immagini è necessario moltiplicare ogni lunghezza della foto a **n** ingrandimenti per il fattore **K**.



Per dimostrare questo procedimento, facciamo un esempio.

Immaginiamo di possedere due fotografie che rispondono a tutti i requisiti del metodo, tuttavia, sono a ingrandimenti differenti. La prima fotografia è scattata a 50 ingrandimenti, la seconda a 100

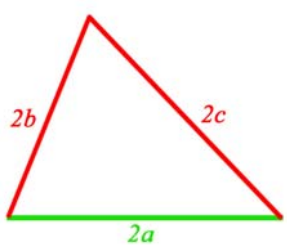
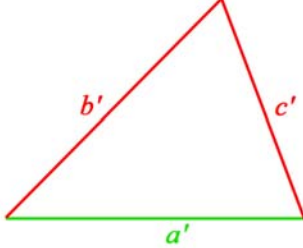
ingrandimenti. Abbiamo quindi che $K = \frac{100}{50} = 2$

Ora confrontiamo i triangoli risultanti dalle fotografie effettuata a n ed n' ingrandimenti.(fig.8-9)

E' evidente che la base a' del secondo triangolo corrisponde alla base a del primo moltiplicata il fattore K . Lo stesso ragionamento vale per tutti i lati corrispondenti.

Pertanto per uniformare gli ingrandimenti e poter confrontare le foto è necessario moltiplicare ogni lato del triangolo minore per il fattore $K = 2$, ottenendo due triangoli simili, in quanto i lati corrispondenti sono proporzionali e il rapporto di proporzionalità è proprio K .

Quindi gli angoli di queste due figure sono rimasti inalterati dopo la trasformazione, come si può vedere nelle immagini di fig. 10 e 11.

	
<p>fig.10. Il triangolo a n ingrandimenti moltiplicato per il fattore K</p>	<p>fig.11 Il triangolo a n' ingrandimenti</p>

Questo procedimento permette di utilizzare il metodo proposto con qualunque ingrandimento.

E' necessario solo che la distanza lineare fra le stelle di riferimento sia identica in entrambe le foto, gli altri lati possono avere misure a piacere.

Un altro problema che sorge durante le misurazioni è la differenza fra le risoluzioni

delle due immagini: i programmi di grafica, con qualsiasi unità di misura, basano le proprie misurazioni proprio sulla dimensione dei pixel e quindi sulla risoluzione dell'immagine.

Da questo deriva che uno stesso segmento "reale", misurato al computer su due fotografie differenti per risoluzione, avrà dimensioni nettamente differenti.

Ma, come è facile rendersene conto, K rappresenta anche il fattore di correzione per la differente risoluzione.

Ed ora siamo finalmente pronti a spiccare il volo verso uno spazio sconfinato, che aspetta solo di essere esplorato...