ANALISI DELLA PRECISIONE PER LA MISURA DELL'OMBRA CON IL METODO DEL FORO GNOMONICO

Nicola Scarpel

La forma, le dimensioni, l'intensità e la nitidezza della macchia di luce proiettata su uno schermo da un foro rivolto al Sole dipendono da alcuni parametri. Nel caso più semplice, con il foro circolare e parallelo allo schermo ed entrambi perpendicolari alla direzione dei raggi solari, i parametri si riducono a due: diametro del foro e distanza del foro dallo schermo. Nel caso invece di un foro gnomonico posto su un piano verticale che proietta la macchia di luce sul piano orizzontale si aggiunge come parametro l'inclinazione dei raggi solari, cioè l'altezza del Sole.

1. Il caso più semplice: foro e schermo paralleli tra loro e perpendicolari ai raggi solari

Eseguendo delle semplici prove consistenti nell'avvicinare e allontanare lo schermo dal foro, si scopre che la macchia assume alternativamente due tipici comportamenti:

1- A distanze ravvicinate la macchia tende ad assume la forma del foro e i bordi sono più o meno nitidi per un effetto di penombra. La nitidezza è tanto maggiore quanto più il foro è vicino allo schermo. Chiamo questa situazione "**effetto bordo**" perché la macchia riproduce, più o meno distintamente, la forma del bordo del foro.
2- Oltre una certa distanza, la macchia assume la forma circolare del disco del Sole, indipendentemente dalla forma del foro. Tale immagine del Sole è capovolta e tanto più nitida quanto più lontano è lo schermo dal foro (effetto "**camera oscura**"). D'altra parte essa diminuisce anche di intensità luminosa per cui da una certa distanza in poi (a seconda delle condizioni di luminosità dell'ambiente) non è più percepibile.

Questo "doppio comportamento" della macchia di luce dipende dal fatto che il Sole non è una sorgente puntiforme ma ha un diametro angolare (diametro apparente) di mezzo grado circa (varia da 31' a 32' 35" a seconda della distanza dalla Terra; per semplicità considero questo valore di 0.5°). I due comportamenti della macchia sono separati da una "linea di confine" che è una rapporto preciso tra il diametro del foro, che chiamo f, e la distanza tra il foro e lo schermo, che chiamo d. La condizione di passaggio tra le due situazioni si verifica quando il diametro angolare del foro, visto da un osservatore posto sullo schermo, è uguale al diametro angolare del Sole cioè quando:

$$\frac{d}{f} = \frac{1}{2 \cdot tg 0.25°} = 114.6$$

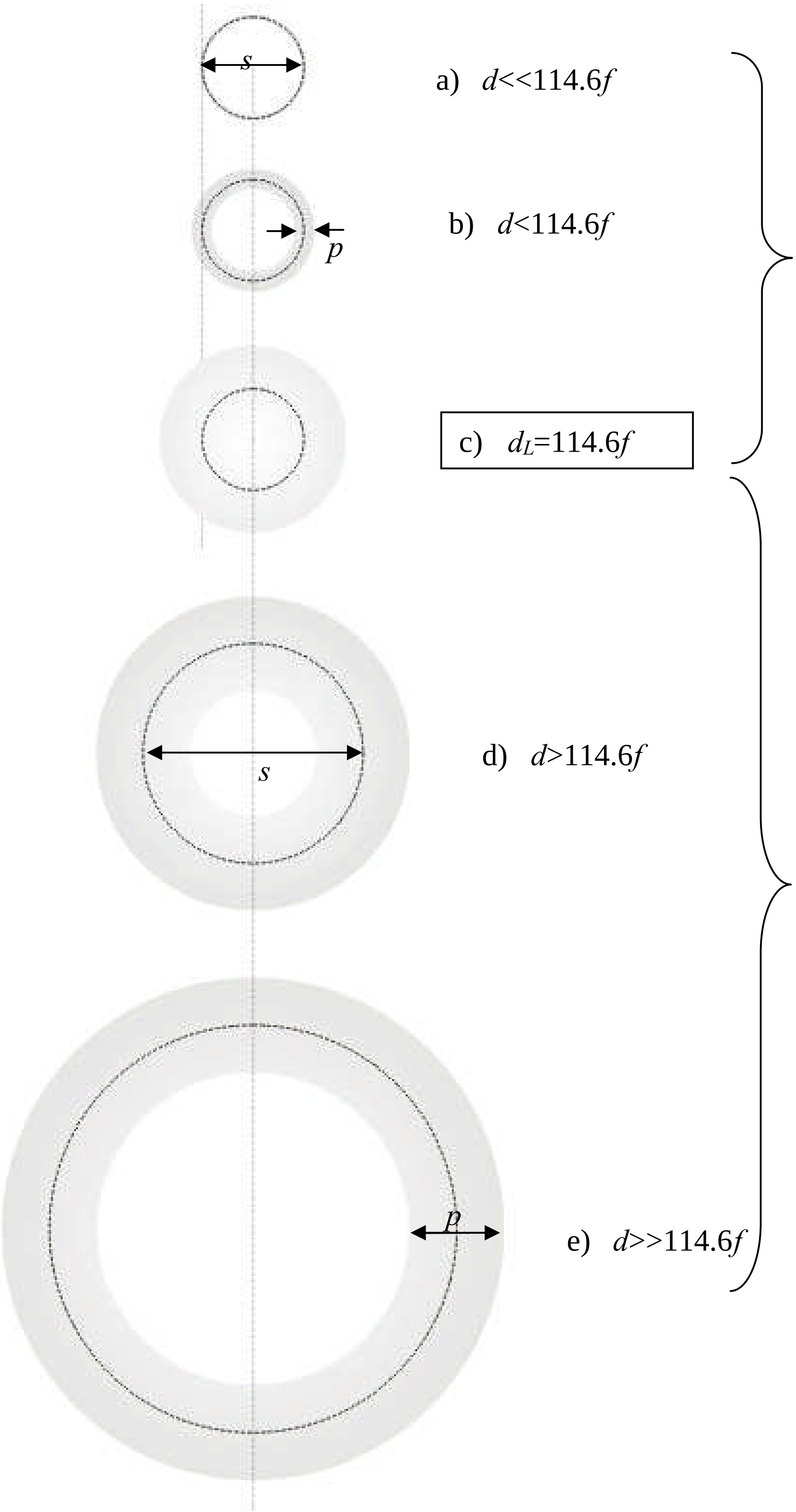
Oppure, detto in altri termini, quando la distanza tra il foro e lo schermo è 114.6 volte il diametro del foro. Chiamo d_L questa "distanza limite" che separa l'effetto bordo dall'effetto camera oscura:

$$\boxed{d_L = f \cdot 114.6}$$

Vedi appendice 1

In pratica, a questa precisa distanza, l'osservatore posto al centro della macchia di luce vede il disco del Sole coincidere perfettamente con il cerchio del foro. A distanze minori il foro è "sovrabbondante" rispetto al disco del Sole e a distanze maggiori l'osservatore vede solo una porzione circolare della superficie solare.

Ora analizziamo in dettaglio ciò che avviene in ciascuna delle due situazioni. Nella figura ho rappresentato schematicamente la trasformazione della macchia. Il cerchio bianco corrisponde alla zona di massima illuminazione mentre la corona circolare grigia rappresenta l'area di penombra con gradazione radiale di intensità luminosa (massima verso la circonferenza interna e minima verso quella esterna della corona, oltre la quale inizia l'ombra pura).



1) Effetto bordo. La larghezza della fascia di penombra p cresce con la legge:

$$p = 2 \cdot d \cdot tg0.25°$$

la proiezione del diametro del foro s invece rimane costante e uguale a f la cui circonferenza (tratteggiata) è media tra le due circonferenze che delimitano la corona di penombra.
Il diametro complessivo m della macchia cresce secondo la funzione:

$$m=f+p$$

2) Effetto camera oscura. La larghezza della fascia di penombra p è costante ed è uguale al diametro del foro f.

$$p=f$$

la circonferenza tratteggiata, che prima rappresentava la proiezione dei bordi del foro, ora rappresenta la proiezione dei bordi del disco solare il cui diametro, che chiamo s, aumenta secondo la stessa funzione con cui prima aumentava p:

$$s = 2 \cdot d \cdot tg0.25$$

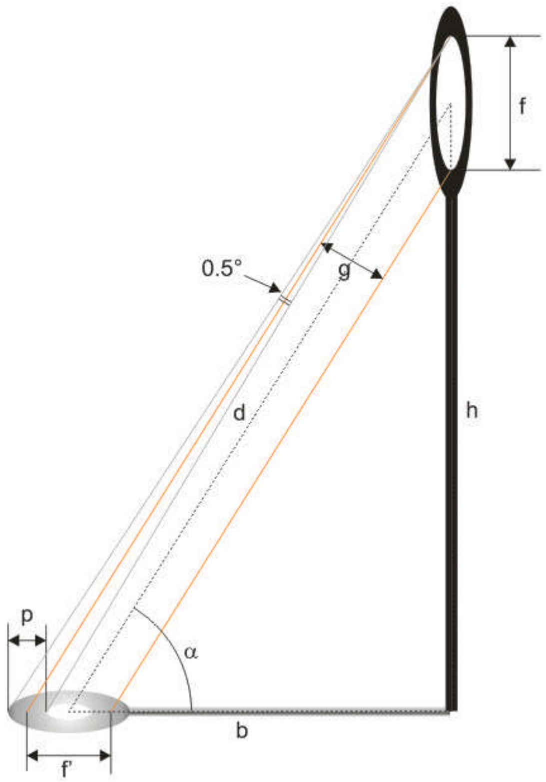
Il diametro complessivo m della macchia ora cresce secondo la funzione:

$$m=s+p$$

Nella situazione intermedia c) il diametro della macchia è due volte il diametro del foro: infatti si ha $p=f$ e quindi $m = 2f$.

Vedi Appendice 2

2) Il caso particolare: gnomone e foro verticali che proiettano l'ombra sul piano orizzontale



In questo caso i parametri in più da tenere in considerazione sono l'altezza del Sole α che influenza la lunghezza dell'ombra *b* da misurare, la larghezza della fascia di penombra *p* ed infine il diametro utile *g* del fascio di luce uscente dal foro. Nel disegno a fianco è rappresentata la condizione a "effetto bordo". Notiamo innanzitutto che, essendo *g* sempre minore di *f* e tanto più piccolo quanto maggiore è l'angolo α, una prima conseguenza è l'accorciamento della distanza limite. Infatti, essendo $g = f\cos\alpha$, la distanza limite si riduce a:

$$\boxed{d_L = 114.6 \cdot f \cdot \cos\alpha}$$

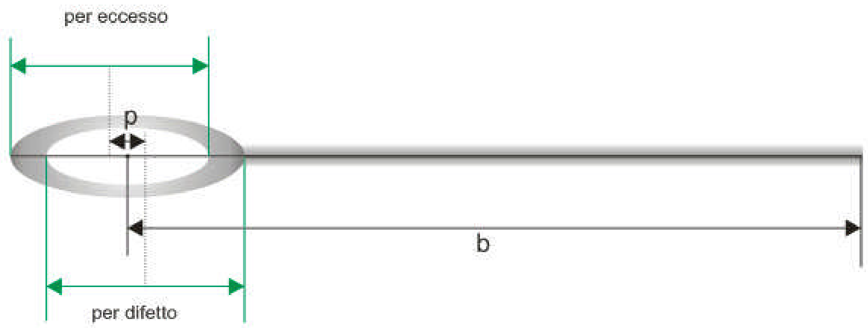
Chiamando p_b la larghezza della fascia di penombra nella situazione dell'effetto bordo e p_c nel caso dell'effetto camera oscura, arriviamo a concludere (vedi *Appendice 3*):

$$\boxed{p_b = \frac{2 \cdot h \cdot tg0.25}{sen^2\alpha}}$$

Mentre:

$$\boxed{p_c = \frac{f}{tg\alpha}}$$

3) Calcolo dell'errore massimo per la misura dell'ombra



Per misurare *b* ho bisogno di stimare graficamente la posizione del punto centrale della macchia di luce. Potrei sbagliare per eccesso se individuo il punto medio tra il bordo interno della penombra più vicino alla base dello gnomone e il bordo esterno più lontano.

Viceversa per l'errore di difetto. Quindi l'errore massimo teorico è:

$$e = \pm \frac{p}{2}$$

Nell'*Appendice 4* dimostriamo che l'errore massimo teorico nella misura dell'ombra si ottiene:

-per l'effetto bordo:

$$\boxed{e_b = \frac{tg0.25}{sen\alpha \cdot \cos\alpha}}$$

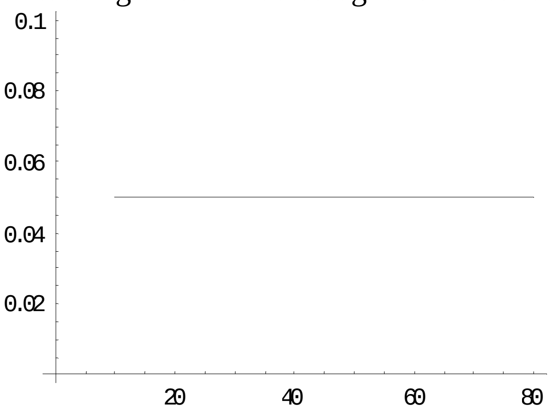
-per l'effetto camera oscura:

$$\boxed{e_c = \frac{f}{2 \cdot h}}$$

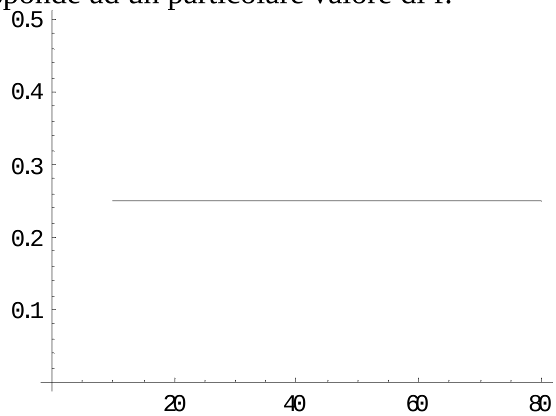
N.B.: per il momento non si è tenuto conto dell'incertezza dovuta all'unità di misura minima

4) Esempi di errori teorici per la misura dell'ombra

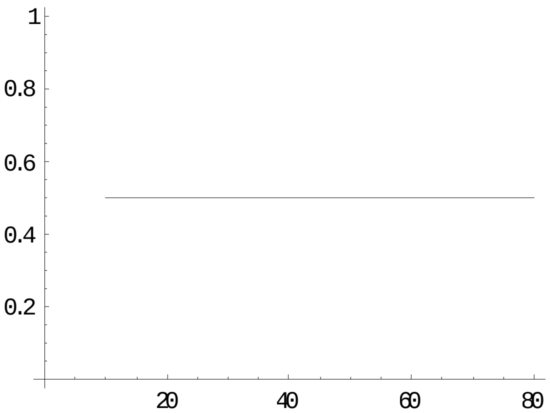
Nei seguenti grafici, in ascisse sono le altezze del sole da 10° a 80° e in ordinate l'errore massimo teorico percentuale.
In tutti i grafici h=100 ed ognuno di essi corrisponde ad un particolare valore di f:



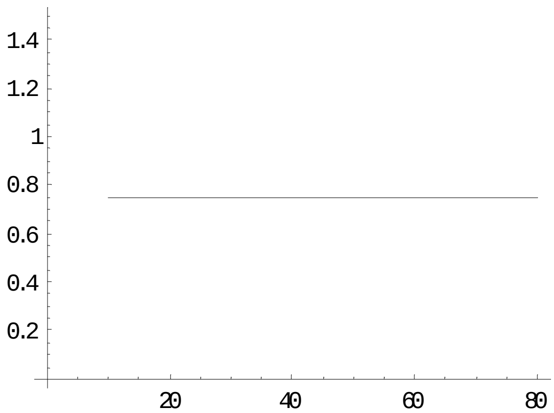
f=0.1



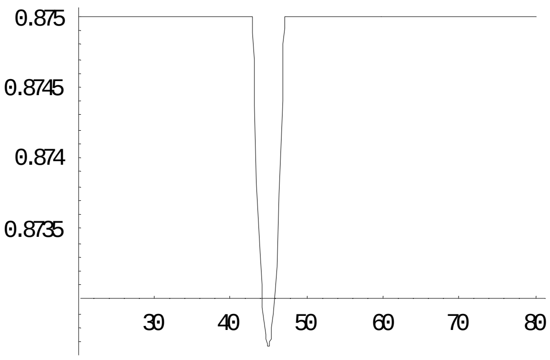
f=0.5



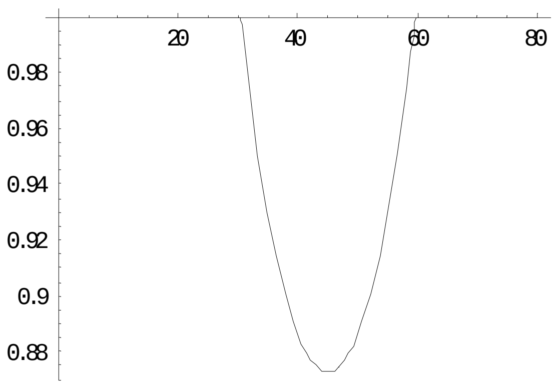
f=1



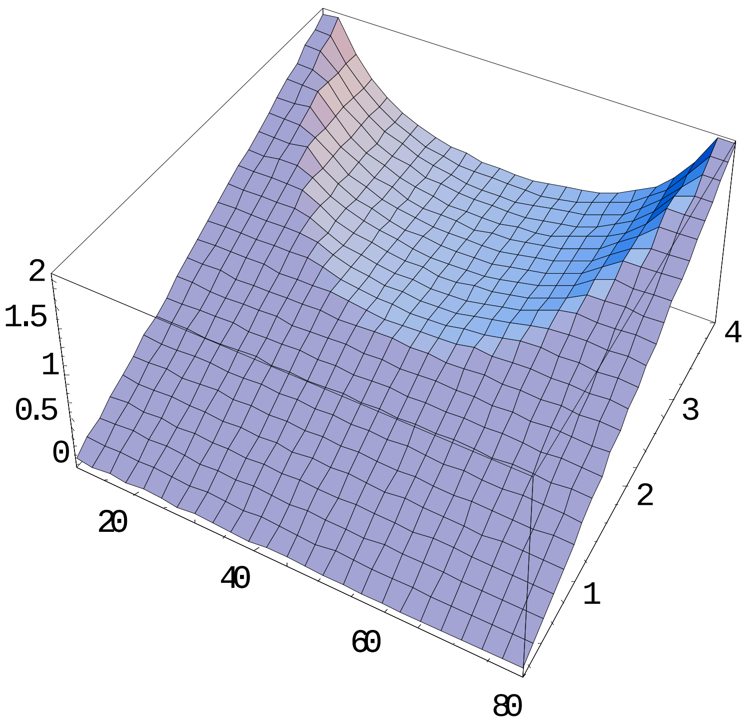
f=1.5



f=1.75



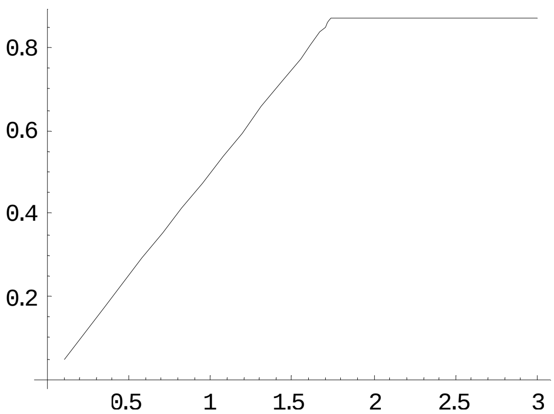
f=2



Nelle due coordinate orizzontali le altezze del sole tra 10° e 80° e i diametri del foro da 0.1 a 4 (per h=100). L'asse z esprime l'errore percentuale.

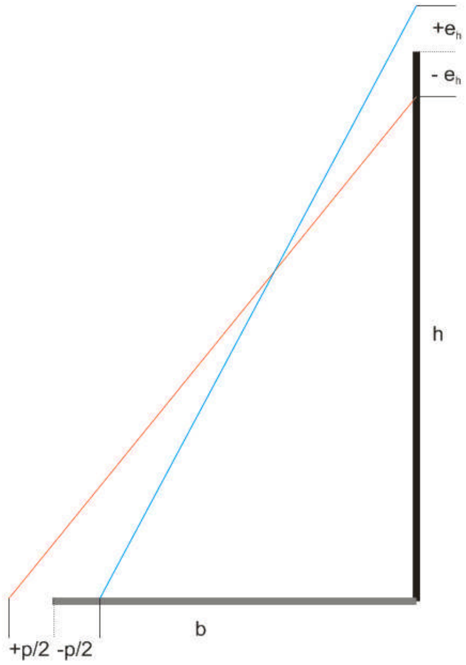
Come si vede, al di sotto di un certo diametro del foro, (in questo caso 1,7 cm circa) a qualsiasi altezza del Sole, predomina l'effetto camera oscura che livella l'errore a mezzo diametro del foro. L'effetto bordo interviene dapprima intorno ai 45° di altezza del Sole per poi estendersi verso i due estremi, in ogni caso abbassando l'errore.

Abbozzo una prima conclusione: l'errore teorico di misura dell'ombra è facilmente controllabile e confrontabile da due osservatori:
- usiamo gnomoni della stessa altezza
- utilizziamo un rapporto f/h uguale e non superiore a 1,7:100 per mantenere l'effetto camera oscura
- calcoliamo l'errore e=f/2h



Errore percentuale per uno gnomone alto 100 e α=45°. In ascissa il diametro del foro, in ordinata l'errore.

Valutazione dell'errore di misura indiretta dell'angolo



Ora combiniamo l'errore di misura dell'ombra ($\frac{p}{2}$) con l'errore di misura dell'altezza dello gnomone (e_h) e calcoliamo gli angoli massimi e minimi con la funzione arcotangente $arctg\left(\frac{h}{b}\right)$ per ricavare l'errore teorico di angolo (e_α).
La misura massima di angolo (linea azzurra) si ottiene da una misura minima di altezza (h-e_h) combinata con una misura massima di ombra cioè $b+\left(\frac{p}{2}+e_h\right)$. Viceversa per la misura minima di angolo (linea rossa).
Nella misura dell'ombra si somma l'incertezza dovuta alla penombra e l'incertezza dovuta all'unità di misura minima del righello, e_h, uguale a quella dell'altezza.
L'errore e_α si ottiene dividendo a metà la differenza tra la massima e la minima:

$$\boxed{e_\alpha = \frac{arctg\left(\dfrac{h-e_h}{b+\dfrac{p}{2}+e_h}\right) - arctg\left(\dfrac{h+e_h}{b-\dfrac{p}{2}-e_h}\right)}{2}}$$

Ora analizziamo i risultati, tenendo conto che, nel caso di una misura di Eratostene, calcoleremo *la differenza* tra due misure di altezza prese da due località a diversa latitudine, quindi non ci interessa l'errore percentuale ma quello assoluto della misura dell'angolo α.

Ecco i dati calcolati per uno gnomone alto 1 m (e_h =±1 mm) e foro di 1 cm

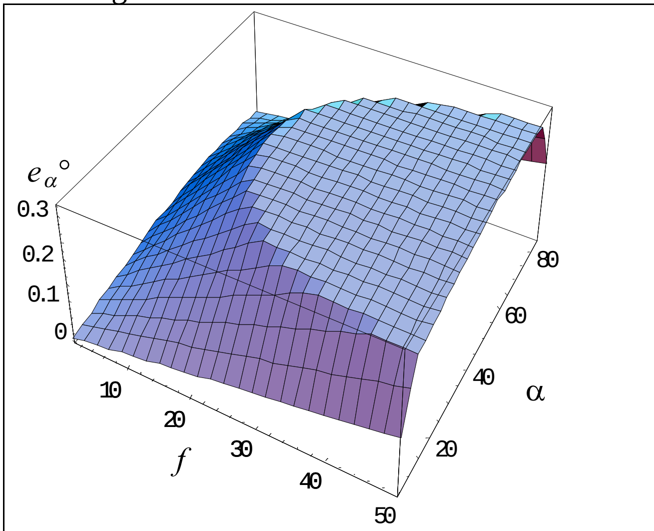
α°	p	p/2	b	e_α°
5	11,43	5,715	11430,1	0,030284
10	5,6713	2,8356	5671,28	0,060518
15	3,7321	1,866	3732,05	0,089784
20	2,7475	1,3737	2747,48	0,117192
25	2,1445	1,0723	2144,51	0,141909
30	1,7321	0,866	1732,05	0,163185
35	1,4281	0,7141	1428,15	0,180373
40	1,1918	0,5959	1191,75	0,19295
45	1	0,5	1000	0,200536
50	0,8391	0,4195	839,1	0,202898
55	0,7002	0,3501	700,208	0,199967
60	0,5774	0,2887	577,35	0,19183
65	0,4663	0,2332	466,308	0,178735
70	0,364	0,182	363,97	0,16108
75	0,2679	0,134	267,949	0,139401
80	0,1763	0,0882	176,327	0,114357
85	0,0875	0,0437	87,4887	0,086708

E per uno gnomone alto 100 mm con foro di 1 mm:

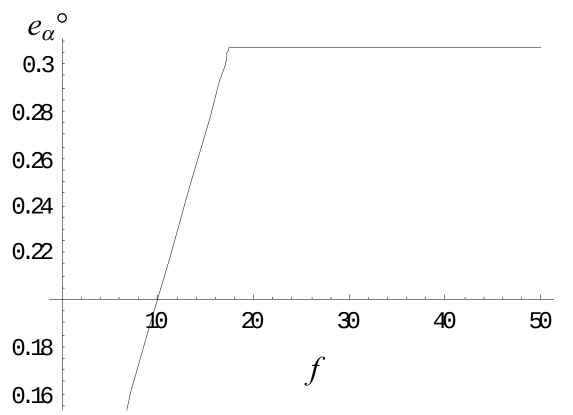
α°	p	p/2	b	e_α°
5	11,43	5,715	1143,01	0,078975
10	5,6713	2,8356	567,128	0,164255
15	3,7321	1,866	373,205	0,253249
20	2,7475	1,3737	274,748	0,343251
25	2,1445	1,0723	214,451	0,431525
30	1,7321	0,866	173,205	0,515389
35	1,4281	0,7141	142,815	0,592293
40	1,1918	0,5959	119,175	0,659902
45	1	0,5	100	0,716164
50	0,8391	0,4195	83,91	0,759372
55	0,7002	0,3501	70,0208	0,788214
60	0,5774	0,2887	57,735	0,801816
65	0,4663	0,2332	46,6308	0,799765
70	0,364	0,182	36,397	0,782123
75	0,2679	0,134	26,7949	0,749425
80	0,1763	0,0882	17,6327	0,702661
85	0,0875	0,0437	8,74887	0,643251

In entrambi i casi siamo nelle condizioni dell’effetto camera oscura.

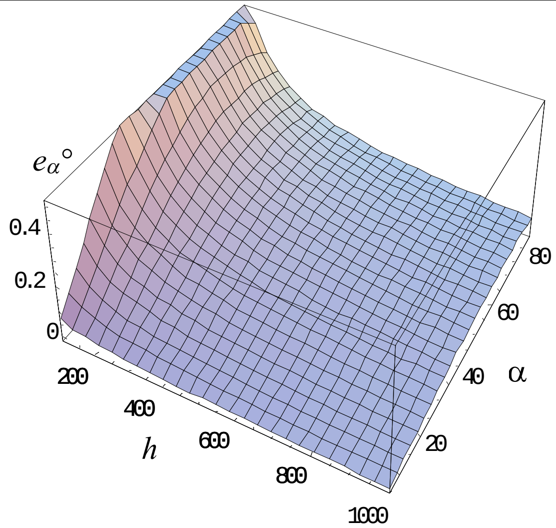
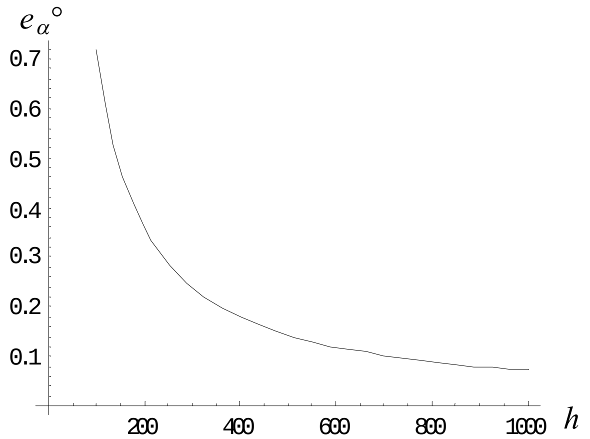
Alcuni grafici riassuntivi:



Gnomone alto 1000 mm: variazione dell’errore per l’aumento del foro fino a 50 mm. Il “tavolato” rappresenta la regione ad effetto bordo.



Sezione per α=45°: lo stabilizzarsi dell’errore per un foro superiore ai 16 mm circa, per l’effetto bordo.

	
Foro di 1 millimetro e variazione dell'altezza dello gnomone da 100 a 1000 mm	Sezione per α=45°

Forma e dimensioni della macchia di luce

La macchia di luce proiettata sul pavimento orizzontale dal foro circolare verticale è un'ellisse i cui assi dipendono dal diametro del foro e dall'altezza del Sole α. Il calcolo deve tenere conto del diverso comportamento nei due casi (effetto camera oscura o effetto bordo).
Siano a_v e a_o rispettivamente l'asse che deriva dalla proiezione del diametro verticale e da quello orizzontale del foro.

<u>1) Effetto bordo</u>

Come abbiamo visto, nell'ambito dell'effetto bordo il diametro della macchia di luce non varia per raggi perpendicolari allo schermo. Quindi se consideriamo a_v:
La prima trasformazione è quella che riduce il diametro utile g moltiplicando f per il fattore $\cos\alpha$:

$$g = f\cos\alpha$$

La seconda proietta g sul piano orizzontale, moltiplicandolo per il fattore $\frac{1}{sen\alpha}$:

$$a_v = \frac{g}{sen\alpha}$$

Quindi:

$$a_v = \frac{f\cdot\cos\alpha}{sen\alpha}$$

O meglio:

$$\boxed{a_v = \frac{f}{tg\alpha}}$$

Consideriamo a_o :
il diametro orizzontale è indifferente sia alla riduzione vista in precedenza del diametro utile g che alla seconda trasformazione:

$$\boxed{a_o = f}$$

<u>2) Effetto camera oscura</u>

Oltre la distanza limite, entrambi gli assi non dipendono più dal diametro del foro, bensì dalla distanza (per il fattore $2\cdot d\cdot tg0.25$). L'asse a_v, inoltre,dipende anche dal fattore $\frac{1}{sen\alpha}$ che inclina la macchia sul piano orizzontale. Sapendo che $d = \frac{h}{sen\alpha}$:

$$a_v = 2\cdot\frac{h}{sen\alpha}\cdot tg0.25\cdot\frac{1}{sen\alpha}$$

Cioè:

$$\boxed{a_v = \frac{2h\cdot tg0.25}{sen^2\alpha}}$$

L'asse a_o invece:

$$\boxed{a_o = \frac{2h\cdot tg0.25}{sen\alpha}}$$

$\alpha°$	effetto camera?	a_v	a_o	rapporto
5	si	1148,8	100,1	11,5
10	si	289,4	50,3	5,8
15	si	130,3	33,7	3,9
20	si	74,6	25,5	2,9
25	si	48,9	20,6	2,4
30	si	34,9	17,5	2,0
35	si	26,5	15,2	1,7
40	si	21,1	13,6	1,6
45	si	17,5	12,3	1,4
50	si	14,9	11,4	1,3
55	si	13,0	10,7	1,2
60	si	11,6	10,1	1,2
65	si	10,6	9,6	1,1
70	si	9,9	9,3	1,1
75	si	9,4	9,0	1,0
80	si	9,0	8,9	1,0
85	si	8,8	8,8	1,0

Con foro 10 mm e h=1000 mm. Effetto camera oscura.

$\alpha°$	effetto camera?	a_v	a_o	rapporto
5	si	1148,8	100,1	11,5
10	no	567,1	100,0	5,7
15	no	373,2	100,0	3,7
20	no	274,7	100,0	2,7
25	no	214,5	100,0	2,1
30	no	173,2	100,0	1,7
35	no	142,8	100,0	1,4
40	no	119,2	100,0	1,2
45	no	100,0	100,0	1,0
50	no	83,9	100,0	0,8
55	no	70,0	100,0	0,7
60	no	57,7	100,0	0,6
65	no	46,6	100,0	0,5
70	no	36,4	100,0	0,4
75	no	26,8	100,0	0,3
80	no	17,6	100,0	0,2
85	si	8,8	8,8	1,0

Con foro 100 mm e h=1000 mm per forzare l’effetto bordo.

Appendice 1: la distanza limite d_L

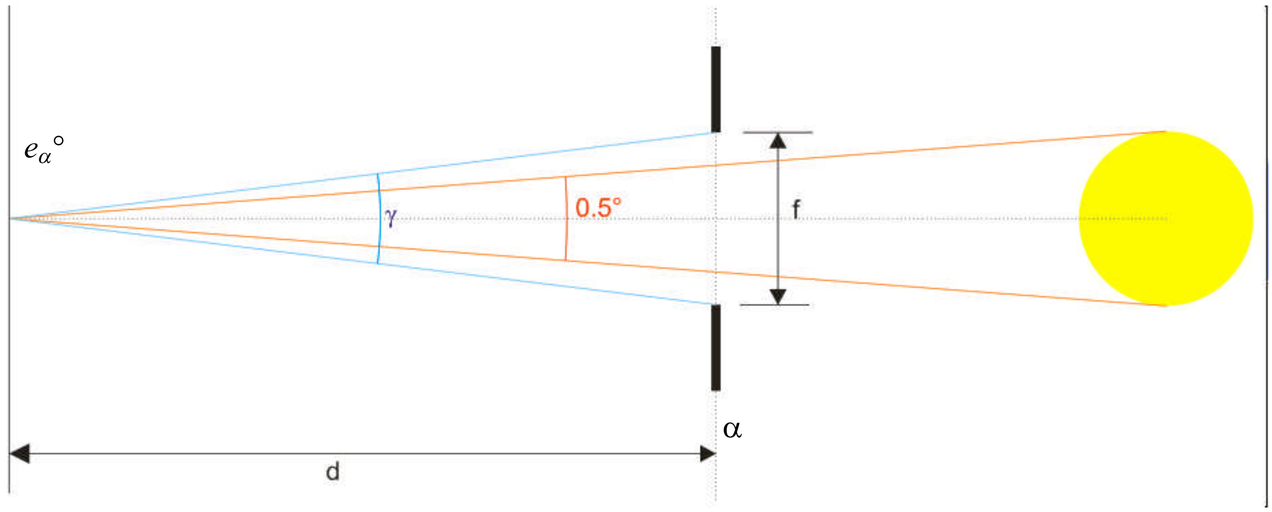


Fig.1

Nella figura 1 lo schermo ha un diametro angolare γ maggiore del diametro angolare del Sole di 0.5° (in questo disegno e nei successivi il diametro angolare del Sole è stato esagerato per rendere più comprensibili i rapporti geometrici).

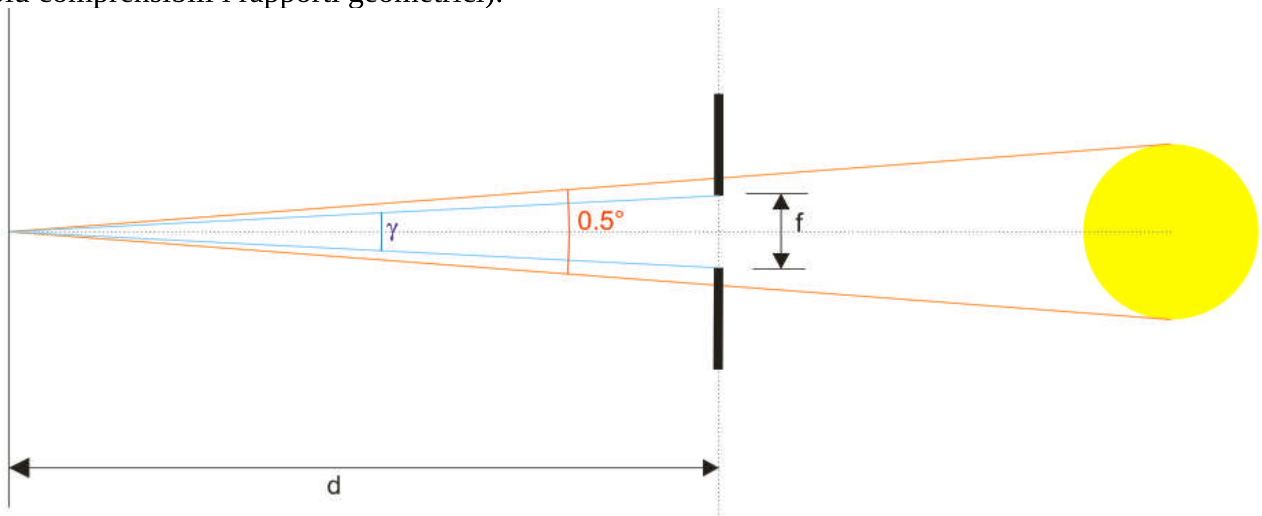


Fig.2

Nella figura 2 avviene il contrario: $\gamma<0.5°$.

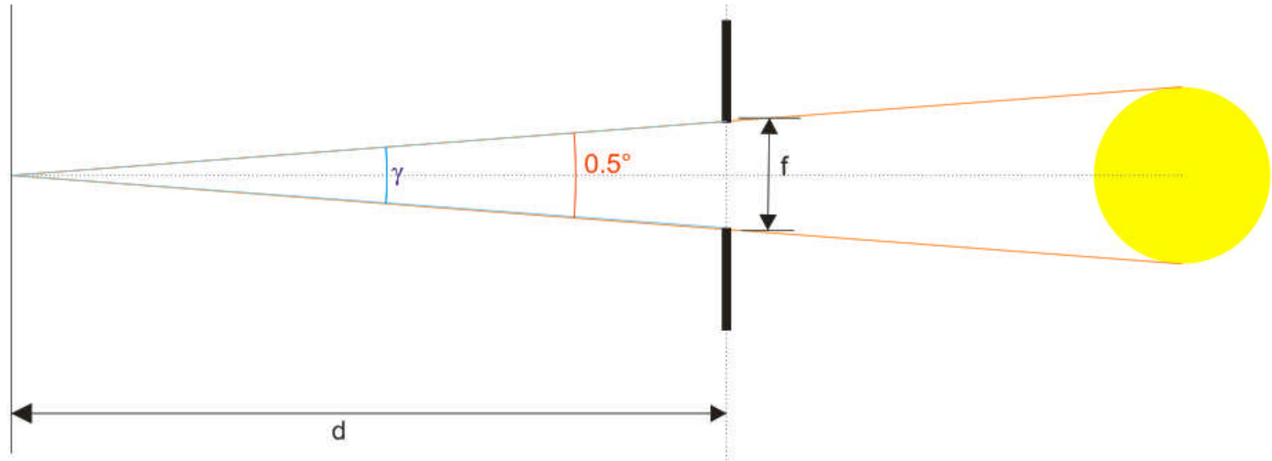


Fig.3

Ad un rapporto preciso *d/f* i due angoli sono uguali: γ<0.5°. Ciò avviene ad una distanza limite d_L che si ricava da:

$$\frac{f}{2} = d \cdot tg\,0.25°$$

E quindi:

(1) $$\boxed{d_L = \frac{f}{2 \cdot tg0.25°} = f \cdot 114.6}$$

Appendice 2: Trasformazioni della macchia di luce su schermo parallelo al foro e perpendicolare ai raggi solari

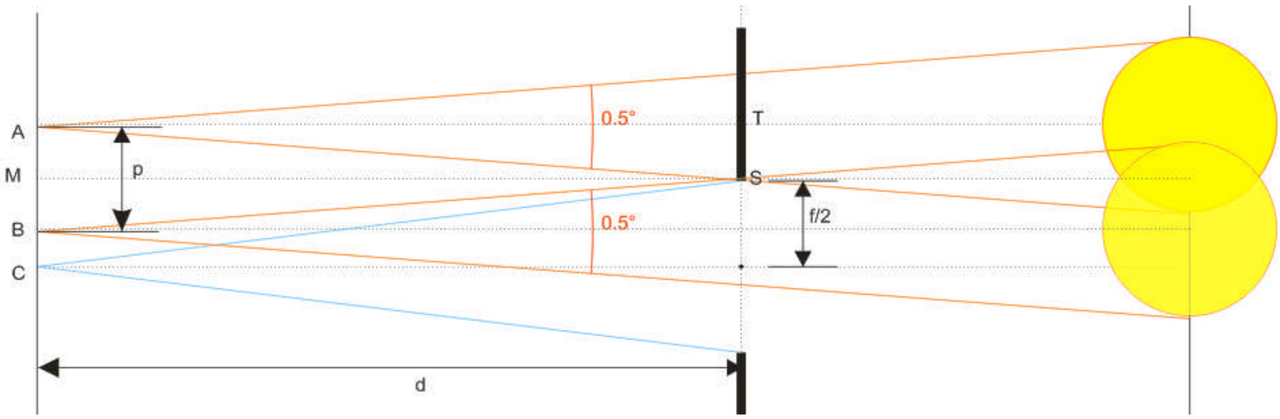


Fig.4

In figura 4 analizziamo la situazione in cui $d<d_L$. Un osservatore al punto A non vede il Sole. O meglio, vede un solo punto di luce sul bordo superiore del foro, corrispondente al bordo inferiore del disco solare. Scendendo verso il punto B l'osservatore vede una porzione sempre maggiore del disco solare. In tutte le posizioni comprese tra B e C, l'osservatore vede l'intero disco solare nel campo del foro. Essendo C in corrispondenza con il centro del foro, scendendo al di sotto si ripete la successione in modo simmetrico. La macchia di luce prodotta ha un diametro complessivo uguale a $2 \cdot \overline{AC}$ e compare all'incirca come in figura anche se le zone non sono così definite. Un cerchio centrale più luminoso di raggio $\overline{BC}$ è circondato da una corona circolare di penombra larga $\overline{AB}$ in cui l'intensità luminosa sfuma gradualmente da un massimo interno ad un minimo esterno. Chiamo *p* questa larghezza della fascia di penombra, utile per calcolare l'errore teorico della misira della lunghezza dell'ombra. M è il punto medio della larghezza di questa fascia.

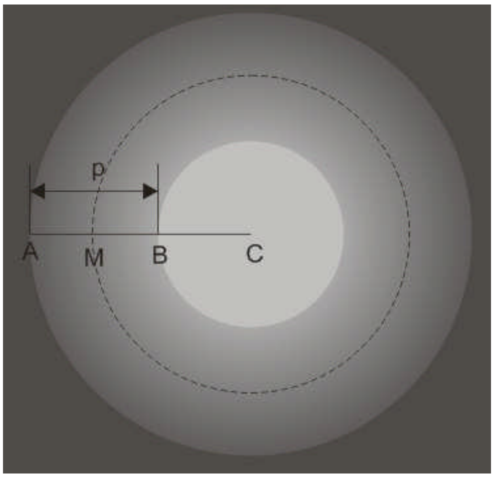


Fig.5

E' interessante notare che: $\overline{CM}$ è uguale al raggio del foro e rimane costante a qualsiasi distanza, mentre *p* aumenta per distanze maggiori e viceversa. Quanto più il foro è lontano dallo schermo, tanto maggiore è la "sfocatura" dell'immagine del foro, dovuta proprio all'aumento di *p*. Il massimo allargamento è raggiunto alla distanza $d_L=114.6f$ quando *B* coincide con il centro *C* e la macchia possiede complessivamente (compresa l'intera fascia di penombra) un diametro pari a 2 volte il diametro del foro. Il restringimento minimo della fascia di penombra è zero quando il foro è a contatto con lo schermo.
Per calcolare *p*, notiamo che esso è indipendente dal diametro del foro: è la fascia di penombra proiettata da qualsiasi contorno di un corpo opaco. Essa risponde solo al diametro angolare del Sole e alla distanza del foro dallo schermo. Infatti (*fig.4*) notiamo che sul triangolo rettangolo *AMS*, congruente ad *ATS*, si può applicare il rapporto trigonometrico della tangente:

$$\frac{p}{2} = d \cdot tg0.25°$$

e concludiamo quindi che:
(2) se $d<d_L$ $\boxed{p = 2 \cdot d \cdot tg0.25°}$

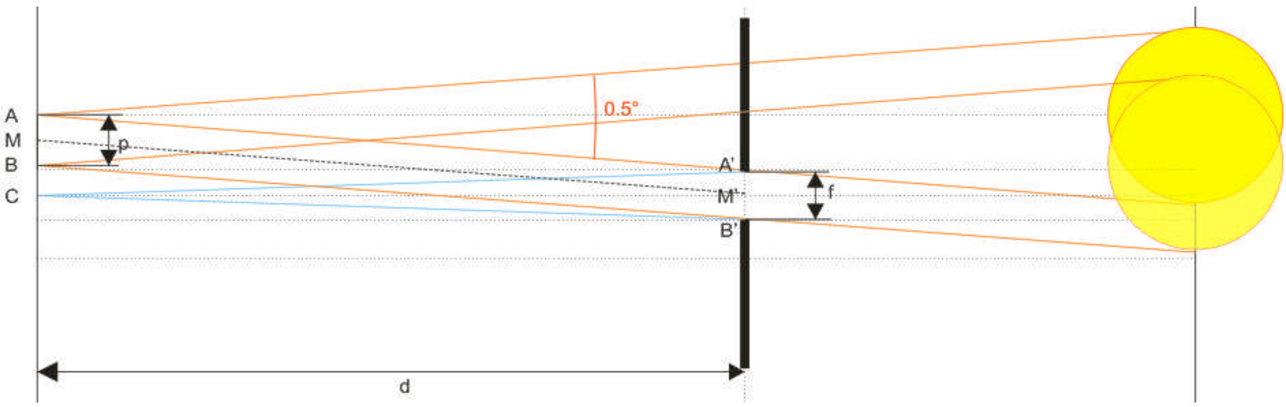


Fig.6

In figura 6 la distanza *d* è maggiore della distanza limite d_L. Il foro può mostrare, ad un osservatore posto a questa distanza dello schermo, solo una porzione del disco solare. L'osservatore in A vede un solo punto di luce corrispondente al bordo inferiore del disco solare e in B vede l'intero foro occupato da una porzione del Sole. A differenza del caso precedente, ciò che varia con il variare del rapporto f/d è la porzione pienamente illuminata dello schermo, il cui raggio è $\overline{CM}$. Esso aumenta proporzionalmente alla distanza *d* secondo la funzione:

$$\overline{CM} = d \cdot tg0.25$$

Infatti l'angolo $M\hat{M}'C$ è uguale a 0.25° essendo il lato MM' parallelo ad AA'.
La fascia di penombra ***p***, che è uguale al diametro ***f*** del foro, rimane costante per qualsiasi distanza perché AA' è parallelo a BB'. Quindi

(3) se $d>d_L$ $\boxed{p = f}$

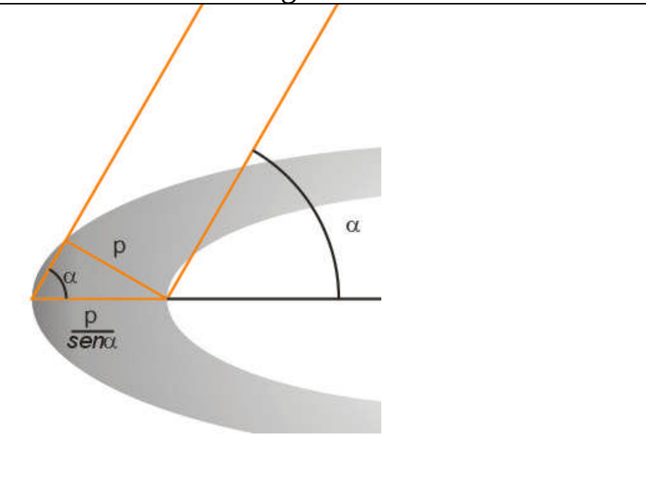
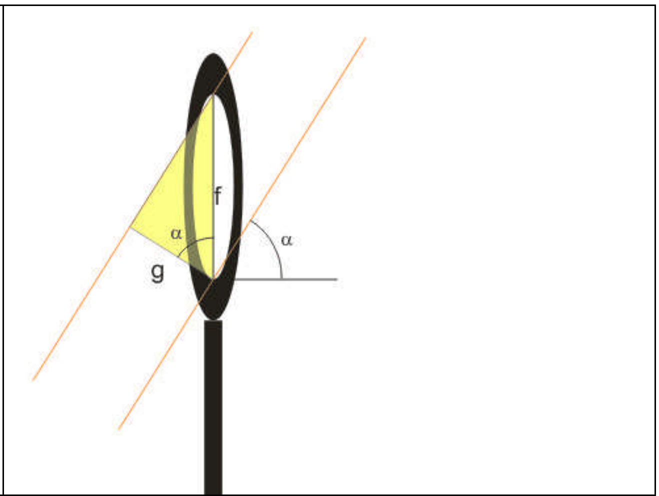
Di conseguenza con l’aumentare della distanza ***d*** rispetto ad ***f***, ***p*** si riduce rispetto al diametro complessivo della macchia, rendendo sempre migliore la “messa a fuoco” dell’immagine del disco solare. Da qui il fenomeno della “camera oscura”.
Alla distanza limite invece, sostituendo ***d*** con $\boldsymbol{d_L}$, vedi (1), il raggio diventa:

$$\overline{CM} = \frac{1}{2 \cdot tg\, 0.25} \cdot f \cdot tg\, 0.25 = \frac{f}{2}$$

e quindi il diametro dell’intera macchia è uguale al doppio del diametro del foro e l’estensione della penombra è massima, situazione questa coincidente con quella vista nel caso precedente, sempre per la distanza limite.

Appendice 3: foro verticale e schermo orizzontale

Nel caso in cui i raggi solari non siano perpendicolari allo schermo (altezza del Sole α), abbiamo due immediate conseguenze:

	
(a) il valore di p è maggiore e deve essere corretto moltiplicandolo per il fattore $\frac{1}{sen\alpha}$.	(b) il diametro utile del foro non è più f ma $g = f\cos\alpha$

Quindi, nel caso dell'effetto bordo ($d<d_L$), ricaviamo dalla (2) e dalla conseguenza (a):

$$p_b = \frac{2\cdot d\cdot tg0.25°}{sen\alpha}$$

E, dato che $d = \frac{h}{sen\alpha}$, sostituiamo e otteniamo p_b in funzione di h:

(4) $$\boxed{p_b = \frac{2\cdot h\cdot tg\,0.25°}{sen^2\alpha}}$$

Nel caso invece dell'effetto camera oscura ($d>d_L$), ricaviamo dalla (3) e da entrambe le conseguenze (a) e (b):

$$p_c = \frac{f\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Cioè:

(5) $$\boxed{p_c = \frac{f}{tg\,\alpha}}$$

Anche la distanza limite si riduce vedi la (1) e la conseguenza (b):

(6) $$\boxed{d_L = \frac{f}{2\cdot tg\,0.25°}\cos\alpha = f\cdot 114.6\cdot\cos\alpha}$$

Appendice 4: errore massimo teorico della misura dell'ombra

Abbiamo visto precedentemente che l'errore va calcolato dal rapporto tra mezza penombra e ombra:
:

(7) $$e = \frac{p}{2b}$$

Nel caso dell'effetto bordo ricordiamo la (4):

$$p_b = \frac{2 \cdot h \cdot tg\,0.25}{sen^2 \alpha}$$

Che sostituiamo nella (7):

$$e_b = \frac{\cancel{2} \cdot h \cdot tg\,0.25}{\cancel{2} \cdot b \cdot sen^2 \alpha}$$

E, sapendo che *b* si può scrivere in funzione dell'altezza dello gnomone *h*:

$$b = \frac{h}{tg\alpha}$$

Sostituiamo *b*:

$$e_b = \frac{h \cdot tg0.25 \cdot tg\alpha}{h \cdot sen^2 \alpha}$$

E semplifichiamo ottenendo:

(8) $$\boxed{e_b = \frac{tg0.25}{sen\alpha \cdot \cos\alpha}}$$

Nel caso dell'effetto camera oscura, dalla (7) e dalla (5) ricaviamo:

$$e_c = \frac{p_c}{2b} = \frac{f}{2 \cdot b \cdot tg\alpha}$$

E se al posto di *b* mettiamo $\frac{h}{tg\alpha}$ ricaviamo:

$$e_c = \frac{f \cdot tg\alpha}{2 \cdot h \cdot tg\alpha}$$

Da cui:

(9) $$\boxed{e_c = \frac{f}{2 \cdot h}}$$